Artikel Meth. Ordening
E. W. Beth

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

14e JAARGANG 1938, Nr. 5.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

☛ Bij de verzending van pres. ex. van de *tweede* druk (thans derde) van de Schooltafel is een prosp. van ongeveer 3 blz. bijgevoegd. Men zal mij zeer verplichten met toezending van dat prosp.; noch de uitgever, noch ik, hebben een ex. meer. P. W.

INHOUD.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

$1^1/_2$ cts. postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

Giro Ned. Bk. No. 1858 Post Giro No. 6593

GRONINGEN.

Ondergetekende, abonné op { Compositio Mathematica / Nieuw Archief voor Wiskunde / „Christiaan Huygens" / „N. T. voor Wiskunde" / „Euclides" }

verzoekt toezending van 1 exemplaar: *)

BOTTEMA, De Elementaire Meetkunde van het Platte Vlak

geb. in heel linnen à *f* 6 50 (gewone prijs is *f* 7.50)
ingenaaid . . . à - 5.50 („ „ „ - 6.50)

DIJKSTERHUIS, Archimedes

geb. à *f* 3.90 (gewone prijs is *f* 4.50)

door bemiddeling van de boekhandel
direct per post,

....

Naam: Woonplaats:

....

*) S.v.p. door te halen wat niet wordt verlangd.
Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex., en mits besteld vóór 1 Aug. 1938; voor Indië vóór 1 Oct. 1938.

PROSPECTUS

DE ELEMENTAIRE MEETKUNDE VAN HET PLATTE VLAK

DOOR

DR. O. BOTTEMA

Directeur der R.H.B.S. te Deventer,
Privaat-docent aan de Rijksuniversiteit te Leiden



f 6.50, geb. f 7.50

Voor abonné's op Noordhoff's
Wisk. Tijdschriften tot 1 Aug. '38
f 5.50, geb. f 6.50

P. NOORDHOFF N.V. - 1938 - GRONINGEN, BATAVIA

VOORWOORD.

In dit boek wordt een poging gedaan, de elementaire meetkunde zodanig te behandelen, dat enerzijds gestreefd wordt naar een volledige axiomatische fundering, die elk beroep op de aanschouwing vermijdt, terwijl anderzijds de bespreking der grondslagen niet het einddoel is, maar gevolgd wordt door een uitwerking der beginselen, waarbij verschillende detailvragen ter sprake komen. In verband met deze uitgebreide doelstelling hebben wij ons beperkt tot het platte vlak.

Het feit, dat enige fundamentele hoofdstukken der Euclidische meetkunde, met name die betreffende de theorie der evenredigheid van lijnen en die der oppervlakken tot een meer algemene, n.l. tot de *affiene* meetkunde behoren, gaf ons aanleiding voorlopig slechts affiene eigenschappen te behandelen. Eerst in hoofdstuk IX komen metrische stellingen aan de orde; de kennis, die wij sinds Poncelet en Klein bezitten omtrent de relatie tussen affiene en Euclidische meetkunde, waarborgt ons, dat hiervoor geen uitbreiding van het axioma-stelsel nodig is, maar volstaan kan worden met het aanwijzen van een figuur ten aanzien waarvan de metriek wordt bepaald of wel met het inperken van de transformatiegroep, die het meetkundig systeem vergezelt.

In tegenstelling met dat der affiene, is het aantal projectieve stellingen in de elementaire meetkunde gering. Er bestond daarom geen aanleiding de grenzen nog verder uit te zetten en de studie der *projectieve* meetkunde als uitgangspunt van het onderzoek te nemen, te minder daar het object dezer meetkunde, het projectieve vlak, principieel van het affiene en Euclidische vlak verschilt. Wel was de axiomatiek der projectieve meetkunde, zoals die in verschillende voortreffelijke werken is vastgelegd, van grote invloed bij het opstellen van het door ons gekozen axioma-stelsel, zoals moge blijken uit de belangrijke plaats, die de snijpuntsstellingen van Desargues en Pascal in onze eerste hoofdstukken innemen. De gekozen opzet bracht verder mee, dat ontwikkeling in de richting der niet-Euclidische meetkunden van de aanvang af was uitgesloten, daar het parallellen-axioma op de voorgrond moest worden geplaatst. Methodisch niet geheel ver-

antwoord — daar zij in een andere omlijsting der Euclidische meetkunde, de conforme meetkunde, thuisbehoort — is de bespreking der inversie, waaraan de overigens op zichzelf staande § 80 is gewijd.

Door de omstandigheden gedwongen om aan de verschillende methoden, waarop men sinds Von Staudt in de meetkunde het getalbegrip invoert, een toe te voegen, die zich aansluit bij de gekozen opzet, namen wij tot grondfiguur het tripel, d.i. de figuur van drie gerangschikte, collineaire punten. De bewerkingen met tripels worden in hoofdstuk III besproken. Onder invloed der moderne algebra hebben wij het getallenlichaam, dat onze meetkunde begeleidt, zoveel mogelijk onbepaald gelaten, al wordt het door de achtereenvolgende axioma's V, VI en VII steeds nader gedetermineerd. Het gehele boek demonstreert de zeer betrekkelijke waarde van het lichaam der reële getallen voor de elementaire meetkunde, indien men slechts uit deze laatste de bepaling van de omtrek en het oppervlak van de cirkel weglaat. Infinitesimale processen komen in het werk niet voor; in hoofdstuk VIII wordt het zwakke continuïteits-axioma VI ingevoerd, waarop tevens een (onvolkomen) ordening gebaseerd is; de volledige ordening heeft plaats in het laatste hoofdstuk door middel van axioma VII.

Uitvoerig zijn de constructie-postulaten behandeld met hun onderlinge betrekkingen en hun draagwijdte.

De opgenomen figuren hebben alleen de bedoeling om het volgen van een betoog te vergemakkelijken. De „opgaven" dienen ten eerste om de tekst — waarvan zij een wezenlijk bestanddeel uitmaken — te bekorten, en ten tweede ter illustratie van wat in een bepaald stadium der opbouw is bereikt.

Een overzicht der ingevoerde axioma's, een lijst der constructie-postulaten en een van de gebruikte notaties, alsmede een register, zijn aan de tekst toegevoegd.

Dank ben ik verschuldigd aan mijn vrouw voor haar trouwe hulp bij de verzorging der copie; aan den heer J. T. Groenman, van wiens zorgvuldige lezing der drukproeven menige verbetering in de tekst het gevolg was; aan den heer P. Wijdenes voor het tekenen der figuren en aan de uitgeefster voor de prettige samenwerking en de goede zorgen aan de uitvoering besteed.

Deventer, 14 Februari 1938. O. BOTTEMA.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

De Grondslagen.

HOOFDSTUK II.

Transformaties.

HOOFDSTUK III.

Bewerkingen met tripels.

HOOFDSTUK IV.

Eigenschappen van veelhoeken.

HOOFDSTUK V.

Het oppervlak van een veelhoek.

HOOFDSTUK VI.

Eigenschappen van affiniteiten.

HOOFDSTUK VII.

Lineaire affiene constructies.

HOOFDSTUK VIII.

De ellips.

HOOFDSTUK IX.

Eigenschappen van volgorde.

HOOFDSTUK X.

Quadratische affiene constructies.

HOOFDSTUK XI.

Metrische eigenschappen.

HOOFDSTUK XII.

Metrische constructies.

HOOFDSTUK XIII.

Gevolgtrekkingen uit het ordeningsaxioma.

UIT HET VERSLAG VAN DE STAATSEXAMEN-COMMISSIE 1937 [1]).

De subcommissie voor de *wiskunde* kan tot haar genoegen opmerken, dat de examenresultaten der A-candidaten, na de inzinking van 1936, zelfs vergeleken met die van 1935 een verbetering vertoonen.

In 1935 waren de gemiddelde cijfers der A-candidaten voor stel- en meetkunde opv. 5,31 en 5,27. In 1936: 5,08 en 4,98. In 1937: 5,44 en 5,34.

Van de 194 A-candidaten, die in 1935 in de stelkunde geëxamineerd werden, verkregen 106 een voldoend cijfer, en van de 188 A-candidaten, die in dat zelfde jaar in de meetkunde geëxamineerd werden, verkregen 99 een voldoend cijfer. In 1936 waren de overeenkomstige getallen voor de stel- en meetkunde opv. 230 en 113 en 224 en 95. In 1937 voor stelkunde 218 en 123, voor meetkunde 212 en 118.

In 1935 behaalden 55 pct. en 53 pct. der A-candidaten een voldoend cijfer voor stel- en meetkunde. In 1936 waren deze percentages 49 en 42. En nu in 1937 56 en 56.

Ook wat de B-candidaten betreft, kan de subcommissie, vergeleken met het vorige jaar, verbetering vaststellen. De gemiddelde cijfers voor stelkunde, meetkunde en trigonometrie met analytische meetkunde zijn nu in 1937 onderscheidenlijk 5,15, 5,5, 5,6. In 1936 waren deze cijfers 4,19, 4,74, 4,5.

Van de 40 in de stelkunde geëxamineerde B-candidaten kregen 24 een cijfer beneden voldoende en 4 daarvan een cijfer lager dan 4. Voor de meetkunde waren deze getallen 38, 18, 3; voor de trigonometrie en analytische meetkunde 40, 18, 5. In 1936 waren deze getallen: voor de stelkunde 42, 30, 16; voor de meetkunde 39, 27, 11; voor de trigonometrie en analytische meetkunde 42, 27, 14.

---

[1]) Bijvoegsel van de Nederlandsche Staatscourant van 31 Dec. 1937 no. 232. — Alle opleiders, voor welk vak ook, *moeten* kennis nemen van de wenken, door de commissie jaar op jaar gegeven.

Terwijl in 1936. nog 21 van de 39 volledige B-candidaten in alle drie de onderdeelen der wiskunde een onvoldoend examen afgelegd hebben, is dat in dit jaar het geval geweest met 13 van de 41.

De bovenstaande statistische gegevens maken het begrijpelijk, dat de subcommissie voor de wiskunde met meer voldoening op de examina van dit jaar terugziet dan op die van het vorige jaar. Dat zich ook nu weer zoowel bij de A-candidaten als bij de B-candidaten flagrante gevallen voordeden van onkunde en onvermogen, werpt op deze grootere voldoening geen schaduw. Vooral omdat het aantal dezer gevallen zoowel relatief als absoluut merkbaar minder is dan dat van het vorige jaar. Het aantal gevallen, waarin de examina der B-candidaten met een cijfer lager dan 4 moesten worden gewaardeerd, is boven reeds medegedeeld. Van de A-candidaten kregen 31 van 218 voor de stelkunde en 32 van 212 voor de meetkunde een cijfer lager dan 4. In 1936 waren de overeenkomstige getallen voor stelkunde 47 en 230 en voor meetkunde 51 en 224.

Hoewel de subcommissie voor de wiskunde nu weer eens eenigen grond heeft om te hopen, dat haar opmerkingen en raadgevingen, in vorige verslagen te vinden, steeds meer ingang gaan vinden, acht zij het ook in dit verslag op zijn plaats, die opmerkingen en raadgevingen met nadruk in de aandacht van examinandi en opleiders aan te bevelen. En wel vooral, omdat ook nu nog menigmaal, en juist helaas bij B-candidaten, een zekere hulpeloosheid is gebleken, die zich door pronken met formules trachtte te camoufleeren. Te veel examencandidaten, en wellicht ook opleiders, willen nog steeds niet gelooven, dat men door het welbewust en met verstand hanteeren van fundamenteele begrippen en methodes veel sterker komt te staan dan door formuledressuur. En laat men ook bedenken, dat de algebra, alweer met begrip en welbewust toegepast, een machtig hulpmiddel is bij andere onderdeelen der wiskunde.

De subcommissie voor de *natuurkunde* kan, lettende op de behaalde cijfers (slechts 40 pct. der candidaten mocht er in slagen een voldoend cijfer te verkrijgen), de resultaten van het examen in dit onderdeel niet bevredigend noemen. Evenals vorige jaren, is dit voor een niet onaanzienlijk deel te wijten aan tekortkomingen op het gebied van de electriciteitsleer. Om de candidaten op hun

gemak te stellen, pleegt de subcommissie uit te gaan van de toepassingen van de Electriciteit, die als het ware voor het grijpen liggen; telkens moest zij daarbij echter ervaren, dat die practische toepassingen door vele candidaten juist zeer moeilijk of in het geheel niet werden doorzien. De leerstof was wel „doorgenomen”, men kende allerlei formules, wist dat 1 Joule = 10^7 erg is, dat 1 Joule = 0,24 gramcal. is, kende de wet van Ohm in formulevorm, was bereid de examinatoren ongevraagd op nog meer formules te vergasten, afgewisseld met vragen als „bedoelt U dat misschien?”, maar verwerkt en begrepen was de leerstof heel vaak niet en bij de studie had de belangstelling, de drang om de verschillende problemen te doorzien, die de natuurkunde den candidaten voorlegt, waarschijnlijk ontbroken.

Met begrippen als E.M.K., klemspanning, stroomeffect, kilowattuur, waren vele (zonder overdrijving kan worden gezegd: de meeste) candidaten slecht vertrouwd. Met moeite en hulp gelukte het wel een K.W. uit te drukken in P.K., maar men had er dikwijls geen idee van, hoeveel dat ongeveer zou zijn; het belang van dergelijke herleidingen werd in elk geval niet verstaan. Eenvoudige vragen als: welke factoren bepalen de sterkte van den stroom door een loopenden motor?, waarom kan men met behulp van een transformator geen gelijkstroom transformeeren?, hoe moeten we, beschikkend over een wisselstroomnet, te werk gaan om een accu te laden?, welke energieomzettingen hebben hierbij plaats?, in welk opzicht verschilt een voltmeter van een ampèremeter?, hoe deze instrumenten te schakelen?, op welk beginsel berust een gewone electromotor?, welke is de moderne voortbrengingswijze van kathodestralen?, welke zijn de essentieele onderdeelen van een electrischen trillingskring?, waarvoor dienen normaalelementen?, hoeveel kost het, electrisch een liter water aan de kook te brengen?, welk is het historisch belang van de tangentenboussole?, op welk beginsel berust de absolute electrometer van Thomson en waarvoor dient dit instrument eigenlijk? enz. enz., leverden veelal groote moeilijkheden op.

De functie van lenzen in onze optische instrumenten werd veelal verkeerd opgevat. Hoe de examinator een gewonen leesbril zoo maar met een loupe kon vergelijken, door welke grootheid het dispersievermogen van glas werd getypeerd, waarom voor den

brekingsindex van glas (deze is niet gelijk $\frac{3}{4}$) wel $1\frac{1}{2}$ opgegeven kon worden, maar niet 1,537 b.v., welke de bouw is van een prismakijker, hoe men de kleuren in dunne vliezen kan verklaren, enz. ...., op het examen kwamen vele candidaten er inderdaad achter.

De cascade-methode werd door verschillende candidaten „gekend"; het beginsel waarop een gewone koelmachine berust, dikwijls niet; met de kritische temperatuur werd door enkele candidaten al zeer vreemd omgesprongen; het schetsen van isothermen kostte soms heel wat hoofdbrekens.

Van de beteekenis der eenparige, eenparig versnelde en harmonische beweging waren verschillende candidaten zich evenmin voldoende bewust, zoodat het ook bij de mechanica en de geluidsleer nog wel eens voorkwam, dat de vragen niet werden beantwoord.

DE TAFEL IN 4 DECIMALEN.

DOOR

J. C. BLEEKER en A. J. STARING.

Het artikel van den heer Wijdenes in de lopende jaargang van Euclides, blz. 86 e.v. geeft ons aanleiding tot het schrijven van de volgende opmerkingen.

Wie met logarithmentafels in 4 decimalen gaat werken, weet van te voren dat de nauwkeurigheid van het resultaat (indien men geen rekening houdt met de nauwkeurigheid der gegevens) minder groot is dan bij het gebruik van 5 decimalen. Er is geen reden zich daarover te verontrusten. De vraag is slechts of de gestelde opgave in verband met de gegevens van het probleem het gebruiken van 7, 5, of 4 decimalen bij de logarithmen vereist en wettigt.

Een logarithmentafel in 7 decimalen geeft de logarithmen der getallen van 5 cijfers, en met interpolatie die van 6; een tafel in 5 decimalen geeft de logarithmen der getallen van 4 cijfers, en met interpolatie die van 5; een tafel in 4 decimalen, bestemd voor het onderwijs, behoort de logarithmen der getallen van 3 cijfers te geven, en met interpolatie die van 4. De inrichting van deze tafel moet nl. in principe dezelfde zijn als die van de grotere tafels. Nu zijn bij de berekeningen, die op de H.B.S. aanleiding geven tot het gebruiken van logarithmen, gegevens van 4 cijfers (of 4 cijfers achter de nullen bij decimale breuken, die beginnen met 0,.........) nauwkeurig genoeg. Vraagstukken, waarbij vermenigvuldigingen met veel factoren optreden, zijn geen regel. De mogelijke fout in het antwoord is dan ook niet ontoelaatbaar groot bij het gebruik van tafels in 4 decimalen. Zeker, bij rente-vraagstukken moet men grotere nauwkeurigheid eisen, maar dat is alleen voor A-leerlingen van belang, en het wiskunde-programma der A-afdelingen laat tijd genoeg over om desgewenst het werken met

tafels in 5 decimalen te laten leren, indien ze het met 4 decimalen (met interpolatie er bij) geleerd hebben.

De heer Wijdenes schrijft (blz. 93): „Het grote nadeel van de tafel in vier decimalen is: *bij elk vraagstuk moet men de fout, dat is de maximale afwijking in log x, bepalen en dan met twee ongelijkheden het interval van log x opschrijven of zich voorstellen en daarop laten volgen het interval van x en daarna x zo nauwkeurig mogelijk bepalen.*" Het is ons niet duidelijk waarom dat bij 4 decimalen méér nodig is dan bij 5. Indien men van de tafel niet méér wil eisen dan hij geven kan, is er geen reden om zich telkens weer ervan te overtuigen, hoe groot de afwijking wel zou kunnen zijn. Iets anders is, dat het helemaal geen kwaad kan om, méér dan tot nu toe gedaan werd, de grenzen te bepalen, waartussen het antwoord moet liggen. Dikwijls bleek ons, dat bij het gebruik van de logarithmentafel bijna alle verstandelijk overleg opgeheven wordt. Men krijgt uitkomsten van berekeningen, waarvan een groot gedeelte der cijfers waardeloos is, maar bekommert zich hierover niet. Ons inziens kan men bij het werken met een logarithmentafel — maar dit geldt zowel voor tafels in 4 als in 5 decimalen — juist zo mooi in toepassing brengen het geleerde over onnauwkeurige getallen en benaderde waarden; hierdoor kan er ook een vormende waarde gelegd worden in het anders zo machinale opzoeken van logarithmen.

Wat nu de indeling der tafels betreft: het is niet gewenst tafels in 4 decimalen zó uitgebreid te maken, dat men zonder interpoleren de logarithmen der getallen van 4 cijfers er in vindt, en wel om de volgende redenen:

1. De tafel is even uitgebreid als die in 5 decimalen, waardoor het opzoeken niet sneller geschiedt.

2. Men krijgt moeilijkheden, doordat bij verschillende getallen dezelfde logarithmen staan.

3. Men leert er den leerlingen het interpoleren niet mee.

De voordelen van de tafel in 4 decimalen, die zonder interpoleren de logarithmen der getallen van 3 cijfers geeft, boven de tafel in 5 decimalen zijn:

1. De tafel beslaat een paar bladzijden; er behoeft dus slechts weinig gebladerd te worden.

2. De verschillen zijn zo klein, dat men gemakkelijk uit het hoofd kan interpoleren. Het is zeer nuttig dit rekenen met kleine getallen uit het hoofd te laten doen.

Het voorbeeld 4a van den heer Wijdenes zou men als volgt moeten maken:

$$x = 1{,}257^9$$

log 1,25 = 0,0969 log 1,26 = 0,1004 dus log 1,257 = 0,0994

$$\begin{array}{rr} & 9 \\ \hline \log x = & 0{,}8946 \end{array}$$

waarvoor geschreven moet worden 0,895

$$x = 7{,}85$$

De afronding in log x is een noodzakelijk gevolg van de vermenigvuldiging met 9. Het heeft bij dergelijke berekeningen geen zin om de eis te stellen, dat de maximale afwijking van het antwoord één eenheid van de laatste decimaal niet te boven mag gaan.

Opgemerkt moge nog worden, dat alle getallen, waarvan men de logarithme moet opzoeken, voor zo ver ze meer dan 4 cijfers hebben (ongerekend nullen vooraan), afgerond moeten worden op 4 cijfers.

Voorbeeld 3a van den heer Wijdenes wordt dan als volgt:

$$x = \frac{0{,}014256}{4{,}6925}$$

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}01426 & = 0{,}1541 - 2 \\ \log 4{,}693 & = 0{,}6715 \\ \hline \log x & = 0{,}4826 - 3 \\ x & = 0{,}003038 \end{array}$$

en dit is precies het antwoord, dat men krijgt bij deling der oorspronkelijke getallen volgens de regels, die bij de bewerkingen met onnauwkeurige getallen gelden. Wat wenst men meer?

Zonder twijfel betekent het werken met 4 decimalen een niet te versmaden tijdwinst.

De bezwaren, die de heer Wijdenes signaleert bij het gebruik van de log sin tafel vervallen vrijwel geheel, als men een tafel neemt, die met 10 minuten opklimt, of, wat nog beter is, met

tienden van graden, zoals geschiedt in de tafels in vier decimalen van Dr. H. J. E. Beth (Noordhoff), verschenen na het schrijven van bovenstaand stukje. Uit het voorbericht blijkt tot ons genoegen, dat Dr. Beth het geheel met ons eens is wat het gebruik van 4 decimalen en het interpoleren betreft. Zijn tafels bevatten dan ook geen tafeltjes voor de evenredige delen.

Wageningen, Februari 1938.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. Noordhoff, Groningen:

P. Wijdenes, De kegelsneden voor het M.O., 60 blz., 75 fig. met mallen van parabool, ellips en hyperbool in envelop . . . *f* 0,80

Dr H. J. E. Beth, Tafels in vier decimalen, benevens gegevens op verschillend gebied voor schoolgebruik, 24 blz. . . . . *f* 0,40

P. Wijdenes en *Dr H. J. E. Beth,* Nieuwe schoolalgebra:

Antwoorden II en III *f* 1.—; gratis voor leraren, die de boeken gebruiken.

Uitwerkingen van de Log. vraagstukken, in 4 en in 5 decimalen.

Dr O. Bottema, De elementaire meetkunde van het platte vlak 328 blz. 131 figuren, *f* 6,50, gebonden . . . . *f* 7,50

Voor int. op de tijdschriften opv. *f* 5,50 en *f* 6,50.

Dr P. G. van de Vliet en *Mr Dr H. F. J. Westerveld,* Statistiek voor de H.B.S. A, 48 blz., 28 fig. . . . . *f* 0,95

J. van de Griend Jr., Trigonometrische vraagstukken met beknopte theorie, **4e druk**, 161 blz. . . . . *f* 1,90

FIVE PLACE TABLES

LOGARITHMS OF INTEGERS
LOGARITHMS AND NATURAL VALUES
OF
TRIGONOMETRIC FUNCTIONS
IN THE

DECIMAL SYSTEM

FOR EACH GRADE FROM 0 TO 100 GRADES
WITH INTERPOLATION TABLES

CONTENTS

Price: well bound . . . fl 2,50

Published by P. NOORDHOFF - GRONINGEN (Holland)

In plaats van de oude verdeling van de rechte hoek in 90°, elk van 60′ à 60″, treedt de volgende verdeling steeds meer op de voorgrond: een kwadrant heeft 100 graden (gr), die verder tiendelig worden onderverdeeld: decigraden (dgr), centigraden (cgr), milligraden (mgr) en decimilligraden (dmgr). Bij het gebruik van instrumenten, waarop een kwadrant in 100 gelijke delen is verdeeld, bij het werken op de rekenmachine en met de rekenliniaal heeft de nieuwe verdeling alles voor, de oude alles tegen (dat nieuwe is trouwens al heel wat ouder, dan velen denken, nl. uit het laatste tiental jaren van de 18e eeuw; en in 1633 is er een tafel in Gouda verschenen, waarin het kwadrant in 90 graden werd verdeeld en de graden verder tiendelig). [1])

Voor de school is het om het even, welke verdeling men neemt; de geringe tijdbesparing met de tiendelige maten is niet de moeite waard om van te spreken. De oude minuten en seconden zeggen de leerlingen helemaal niets; woorden zijn het voor velen, meer niet; (dat bv. 1″ van een cirkel zo groot als de evenaar maar 31 meter is, horen de meesten niet eens). Voor de nieuwe maten geldt hetzelfde; daarin staan ze gelijk. Een belangrijk voordeel is, dat *de nieuwe verdeling de bogen inschakelt in het metrieke stelsel.* Een kwart van een meridiaan van de aarde is 10000 km, ook 100 × 100 cgr; zodat 1 kilometer gelijk is aan 1 centigraad van de omtrek van de aarde. Is de boog van de grote cirkel tussen twee punten op aarde 14,26 gr, dan is hun afstand langs die boog 1426 km; op de oude manier is een boog van 14°26′ gelijk aan $14\frac{26}{60} \times \frac{40000}{360}$ km. Verder volgt, dat 1 mgr van de meridiaan 1 hm en 1 dmgr 10 meter is. Deze simpele berekening stelt duidelijk in het licht, dat men zich op school tot de milligraden dient te beperken (1 mgr = 3,24″). Dat in zeer veel gevallen in de praktijk de milligraden nauwkeurig genoeg zijn, hebben deskundigen mij verzekerd.

Bij de inrichting van de logarithmentafel, zie tafel III (over tafel I, de Briggse logarithmen en tafel IV, de omzettingen, spreken we niet) blijkt natuurlijk het begin dezelfde moeilijkheden te bieden als de tafel in de oude verdeling. Daarom ben ik tot 1,20 gr met milligraden (de graden in 3 decimalen dus) vooruitgegaan; evenredige interpolatie geeft echter ook de logarithmen, als α in 4 decimalen gegeven is.

---

[1]) Zie verder het artikel over decimale tafels in de vijfde afl. van Jg. XIII (1936—1937) van het tijdschrift „Euclides".

De aanwezigheid van interpolatietafeltjes wijst er op, dat evenredige interpolatie daar ter plaatse geoorloofd is.

De verschillen tussen de opvolgende logarithmen zijn in de tafel niet opgenomen, evenmin als zulks in de tafel van de Briggse logarithmen wordt gedaan; daarin staan de getallen in rijen, in de goniometrische tafels in kolommen, wat de aftrekking uit het hoofd belangrijk eenvoudiger maakt; bovendien heeft men nog steun aan de getallen boven de tafels met de evenredige delen, zodat men het verschil in de meeste gevallen al ziet aan het eindcijfer. Die verschillen dus op te nemen, heeft weinig zin; het niet opnemen geeft een voordeel, een zeer groot voordeel en daarom zijn ze niet vermeld. Het is daardoor nl. mogelijk te beginnen daar, waar opklimming van 1 cgr voldoende is (1,20 gr), om een volle graad op een bladzijde te houden (zie blz. 52 en volgende) en daardoor de omvang van de tafel tot op de helft te verkleinen. Dit geldt ook voor de tafel van de natuurlijke waarden, die precies 50 bladzijden beslaat; dat de logarithmentafel wat groter is, ligt aan de zeer bijzondere verzorging van het interval tot 1,20 gr. In plaats van 100 bladzijden beslaat deze 66 bladzijden met inbegrip van alle nodige interpolatietafels, terwijl slechts in het interval $0 < \alpha < 15$ cg met de S.T.-tafel wordt gewerkt, die slechts bestaat uit het enkele getal $\overline{6}, 19612$. Dat dit een belangrijke vereenvoudiging is en de geringe uitbreiding dubbel en dwars waard, begrijpt de deskundige gebruiker direct; hoeken kleiner dan 15 cgr en tussen 99,85 gr en 100 gr komen weinig voor en dan nog is de behandeling uiterst eenvoudig.

In de tafel is de Franse manier gevolgd om een negatieve wijzer aan te geven en wel als volgt: $\overline{1},42163 =$

$$0,42163 - 1 = 9,42163 - 10.$$

Deze notatie is eenvoudig en goed en bewerkingen er mee zijn zeker zo gemakkelijk als met de notatie, waarbij alle logarithmen van goniometrishce verhoudingen vermeerderd zijn met 10.

Voor de samenstelling van deze tafels hebben de volgende grote tafels gediend:

Tables portatives de logarithmes par François Callet, Paris 1795, an III (tirage 1808).

Tables trigonométriques, calculées par Ch. Borda, revues, augmentées et publiées par J. B. J. Delambre; an IX (1801).

Neue trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten, berechnet von Johann Philip Hobert und Ludewig Ideler,

Berlin 1799. Volgens de voorberichten hebben de samenstellers in zeer ruime mate gebruik gemaakt van de onvolprezen tafels van Adriaan Vlacq (1628). De tafels van Callet, Borda en van Hobert—Ideler zijn in 7 decimalen; verder hebben we bij onzekerheid, die zich bij afronding kan voordoen, nageslagen:

Tables à 8 décimales des valeurs naturelles des sinus, cosinus et tangentes, dans le système décimal (publiées par l'Association de géodésie de l'union géodésique et géophysique internationale).

Amsterdam Zuid
Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES

0gr

mgr	log sin	log tg	log cotg	log cos	
800	$\bar{2}$,09 920	$\bar{2}$,09 923	1,90 077	$\bar{1}$,99 997	200
1	$\bar{2}$,09 974	$\bar{2}$,09 978	1,90 022		9
2	$\bar{2}$,10 028	$\bar{2}$,10 032	1,89 968		8
3	082	086	914		7
4	136	140	860		6
5	190	194	806		5
6	244	248	752		4
7	298	302	698		3
8	352	355	645	$\bar{1}$,99 997	2
9	406	409	591	$\bar{1}$,99 996	1
810	$\bar{2}$,10 459	$\bar{2}$,10 463	1,89 537	$\bar{1}$,99 996	190
1	513	516	484		9
2	566	570	430		8
3	620	623	377		7
4	673	677	323		6
5	727	730	270		5
6	780	783	217		4
7	833	837	163		3
8	886	890	110		2
9	939	943	057		1
820	$\bar{2}$,10 992	$\bar{2}$,10 996	1,89 004	$\bar{1}$,99 996	180
1	$\bar{2}$,11 045	$\bar{2}$,11 049	1,88 951		9
2	098	102	898		8
3	151	154	846		7
4	203	207	793		6
5	256	260	740		5
6	309	312	688		4
7	361	365	635		3
8	414	417	583		2
9	466	470	530		1
830	$\bar{2}$,11 519	$\bar{2}$,11 522	1,88 478	$\bar{1}$,99 996	170
1	571	575	425		9
2	623	627	373		8
3	675	679	321		7
4	727	731	269		6
5	779	783	217		5
6	831	835	165		4
7	883	887	113		3
8	935	939	061		2
9	$\bar{2}$,11 987	$\bar{2}$,11 991	1,88 009		1
840	$\bar{2}$,12 039	$\bar{2}$,12 042	1,87 958	$\bar{1}$,99 996	160
1	090	094	906		9
2	142	146	854		8
3	193	197	803		7
4	245	249	751		6
5	296	300	700		5
6	348	352	648		4
7	399	403	597		3
8	450	454	546		2
9	501	505	495		1
850	$\bar{2}$,12 553	$\bar{2}$,12 556	1,87 444	$\bar{1}$,99 996	150
	log cos	log cotg	log tg	log sin	mgr

99gr

0gr

mgr	log sin	log tg	log cotg	log cos	
850	$\bar{2}$,12 553	$\bar{2}$,12 556	1,87 444	$\bar{1}$,99 996	150
1	604	608	392		9
2	655	659	341		8
3	706	709	291		7
4	756	760	240		6
5	807	811	189		5
6	858	862	138		4
7	909	913	087		3
8	$\bar{2}$,12 959	$\bar{2}$,12 963	1,87 037		2
9	$\bar{2}$,13 010	$\bar{2}$,13 014	1,86 986		1
860	$\bar{2}$,13 061	$\bar{2}$,13 064	1,86 936	$\bar{1}$,99 996	140
1	111	115	885		9
2	161	165	835		8
3	212	216	784		7
4	262	266	734		6
5	312	316	684		5
6	362	366	634		4
7	413	417	583		3
8	463	467	533		2
9	513	517	483		1
870	$\bar{2}$,13 563	$\bar{2}$,13 567	1,86 433	$\bar{1}$,99 996	130
1	612	617	383		9
2	662	666	334		8
3	712	716	284		7
4	762	766	234		6
5	811	816	184		5
6	861	865	135		4
7	911	915	085		3
8	$\bar{2}$,13 960	$\bar{2}$,13 964	1,86 036		2
9	$\bar{2}$,14 009	$\bar{2}$,14 014	1,85 986		1
880	$\bar{2}$,14 059	$\bar{2}$,14 063	1,85 937	$\bar{1}$,99 996	120
1	108	112	888		9
2	157	162	838		8
3	207	211	789		7
4	256	260	740		6
5	305	309	691		5
6	354	358	642		4
7	403	407	593		3
8	452	456	544		2
9	501	505	495		1
890	$\bar{2}$,14 550	$\bar{2}$,14 554	1,85 446	$\bar{1}$,99 996	110
1	598	603	397		9
2	647	651	349		8
3	696	700	300		7
4	744	749	251		6
5	793	797	203		5
6	841	846	154		4
7	890	894	106		3
8	938	943	057		2
9	$\bar{2}$,14 987	$\bar{2}$,14 991	1,85 009		1
900	$\bar{2}$,15 035	$\bar{2}$,15 039	1,84 961	$\bar{1}$,99 996	100
	log cos	log cotg	log tg	log sin	mgr

99gr

dmgr	55	54	53	52	51	50	49	48	dmgr
1	6	5	5	5	5	5	5	5	1
2	11	11	11	10	10	10	10	10	2
3	17	16	16	16	15	15	15	14	3
4	22	22	21	21	20	20	20	19	4
5	28	27	27	26	26	25	25	24	5
6	33	32	32	31	31	30	29	29	6
7	39	38	37	36	36	35	34	34	7
8	44	43	42	42	41	40	39	38	8
9	50	49	48	47	46	45	44	43	9

cgr	log sin	log tg	log cotg	log cos	
00	Ī,14 891	Ī,15 327	0,84 673	Ī,99 565	**100**
01	939	376	624	564	99
02	Ī,14 987	425	575	563	98
03	Ī,15 035	473	527	562	97
04	083	522	478	561	96
05	130	571	429	560	95
06	178	619	381	559	94
07	226	668	332	558	93
08	273	716	284	557	92
09	321	765	235	556	91
10	Ī,15 368	Ī,15 813	0,84 187	Ī,99 555	**90**
11	416	862	138	554	89
12	463	910	090	553	88
13	510	Ī,15 958	0,84 042	552	87
14	557	Ī,16 006	0,83 994	551	86
15	604	055	945	550	85
16	652	103	897	549	84
17	699	151	849	548	83
18	746	199	801	547	82
19	793	247	753	546	81
20	Ī,15 840	Ī,16 295	0,83 705	Ī,99 545	**80**
21	886	342	658	544	79
22	933	390	610	543	78
23	Ī,15 980	438	562	542	77
24	Ī,16 027	486	514	541	76
25	073	533	467	540	75
26	120	581	419	539	74
27	166	628	372	538	73
28	213	676	324	537	72
29	259	723	277	536	71
30	Ī,16 306	Ī,16 771	0,83 229	Ī,99 535	**70**
31	352	818	182	534	69
32	398	865	135	533	68
33	445	913	087	532	67
34	491	Ī,16 960	0,83 040	531	66
35	537	Ī,17 007	0,82 993	530	65
36	583	054	946	529	64
37	629	101	899	528	63
38	675	148	852	527	62
39	721	195	805	526	61
40	Ī,16 767	Ī,17 242	0,82 758	Ī,99 525	**60**
41	813	289	711	524	59
42	858	336	664	523	58
43	904	382	618	522	57
44	950	429	571	521	56
45	Ī,16 996	476	524	520	55
46	Ī,17 041	522	478	519	54
47	087	569	431	518	53
48	132	616	384	517	52
49	178	662	338	516	51
50	Ī,17 223	Ī,17 708	0,82 292	Ī,99 515	**50**
	log cos	log cotg	log tg	log sin	cgr

cgr	log sin	log tg	log cotg	log cos	
50	Ī,17 223	Ī,17 708	0,82 292	Ī,99 515	**50**
51	268	755	245	514	49
52	314	801	199	513	48
53	359	847	153	512	47
54	404	894	106	511	46
55	449	940	060	510	45
56	494	Ī,17 986	0,82 014	508	44
57	539	Ī,18 032	0,81 968	507	43
58	585	078	922	506	42
59	629	124	876	505	41
60	Ī,17 674	Ī,18 170	0,81 830	Ī,99 504	**40**
61	719	216	784	503	39
62	764	262	738	502	38
63	809	308	692	501	37
64	854	353	647	500	36
65	898	399	601	499	35
66	943	445	555	498	34
67	Ī,17 988	490	510	497	33
68	Ī,18 032	536	464	496	32
69	077	582	418	495	31
70	Ī,18 121	Ī,18 627	0,81 373	Ī,99 494	**30**
71	165	673	327	493	29
72	210	718	282	492	28
73	254	763	237	491	27
74	298	809	191	490	26
75	343	854	146	489	25
76	387	899	101	488	24
77	431	944	056	487	23
78	475	Ī,18 989	0,81 011	485	22
79	519	Ī,19 035	0,80 965	484	21
80	Ī,18 563	Ī,19 080	0,80 920	Ī,99 483	**20**
81	607	125	875	482	19
82	651	170	830	481	18
83	695	214	786	480	17
84	738	259	741	479	16
85	782	304	696	478	15
86	826	349	651	477	14
87	870	394	606	476	13
88	913	438	562	475	12
89	Ī,18 957	483	517	474	11
90	Ī,19 000	Ī,19 528	0,80 472	Ī,99 473	**10**
91	044	572	428	472	09
92	087	617	383	471	08
93	131	661	339	470	07
94	174	706	294	468	06
95	217	750	250	467	05
96	261	794	206	466	04
97	304	839	161	465	03
98	347	883	117	464	02
99	390	927	073	463	01
100	Ī,19 433	Ī,19 971	0,80 029	Ī,99 462	**00**
	log cos	log cotg	log tg	log sin	cgr

90gr **90gr**

mgr	49	48	47	46	45	44	43	2	mgr
1	4,9	4,8	4,7	4,6	4,5	4,4	4,3	0,2	1
2	9,8	9,6	9,4	9,2	9,0	8,8	8,6	0,4	2
3	14,7	14,4	14,1	13,8	13,5	13,2	12,9	0,6	3
4	19,6	19,2	18,8	18,4	18,0	17,6	17,2	0,8	4
5	24,5	24,0	23,5	23,0	22,5	22,0	21,5	1,0	5
6	29,4	28,8	28,2	27,6	27,0	26,4	25,8	1,2	6
7	34,3	33,6	32,9	32,2	31,5	30,8	30,1	1,4	7
8	39,2	38,4	37,6	36,8	36,0	35,2	34,4	1,6	8
9	44,1	43,2	42,3	41,4	40,5	39,6	38,7	1,8	9

cgr	Sin	Tg	Cotg	Cos	
00	0,01 571	0,01 571	63,65 674	0,99 988	**100**
01	586	587	63,02 637	987	99
02	602	602	62,40 836	987	98
03	618	618	61,80 235	987	97
04	634	634	61,20 799	987	96
05	649	649	60,62 496	986	95
06	665	665	60,05 292	986	94
07	681	681	59,49 157	986	93
08	696	697	58,94 062	986	92
09	712	712	58,39 978	985	91
10	0,01 728	0,01 728	57,86 877	0,99 985	**90**
11	743	744	57,34 732	985	89
12	759	759	56,83 519	985	88
13	775	775	56,33 212	984	87
14	791	791	55,83 787	984	86
15	806	807	55,35 222	984	85
16	822	822	54,87 494	983	84
17	838	838	54,40 582	983	83
18	853	854	53,94 465	983	82
19	869	869	53,49 123	983	81
20	0,01 885	0,01 885	53,04 536	0,99 982	**80**
21	901	901	52,60 687	982	79
22	916	917	52,17 556	982	78
23	932	932	51,75 126	981	77
24	948	948	51,33 381	981	76
25	963	964	50,92 304	981	75
26	979	979	50,51 878	980	74
27	0,01 995	0,01 995	50,12 089	980	73
28	0,02 010	0,02 011	49,72 922	980	72
29	026	027	49,34 362	979	71
30	0,02 042	0,02 042	48,96 394	0,99 979	**70**
31	058	058	48,59 007	979	69
32	073	074	48,22 186	979	68
33	089	089	47,85 918	978	67
34	105	105	47,50 192	978	66
35	120	121	47,14 995	978	65
36	136	137	46,80 316	977	64
37	152	152	46,46 142	977	63
38	168	168	46,12 464	977	62
39	183	184	45,79 271	976	61
40	0,02 199	0,02 199	45,46 551	0,99 976	**60**
41	215	215	45,14 296	975	59
42	230	231	44,82 494	975	58
43	246	247	44,51 138	975	57
44	262	262	44,20 217	974	56
45	277	278	43,89 722	974	55
46	293	294	43,59 645	974	54
47	309	309	43,29 977	973	53
48	325	325	43,00 710	973	52
49	340	341	42,71 836	973	51
50	0,02 356	0,02 357	42,43 346	0,99 972	**50**
	Cos	Cotg	Tg	Sin	cgr

cgr	Sin	Tg	Cotg	Cos	
50	0,02 356	0,02 357	42,43 346	0,99 972	**50**
51	372	372	42,15 234	972	49
52	387	388	41,87 492	971	48
53	403	404	41,60 112	971	47
54	419	419	41,33 088	971	46
55	434	435	41,06 413	970	45
56	450	451	40,80 079	970	44
57	466	467	40,54 081	970	43
58	482	482	40,28 412	969	42
59	497	498	40,03 065	969	41
60	0,02 513	0,02 514	39,78 036	0,99 968	**40**
61	529	530	39,53 317	968	39
62	544	545	39,28 903	968	38
63	560	561	39,04 789	967	37
64	576	577	38,80 969	967	36
65	592	592	38,57 438	966	35
66	607	608	38,34 190	966	34
67	623	624	38,11 220	966	33
68	639	640	37,88 524	965	32
69	654	655	37,66 096	965	31
70	0,02 670	0,02 671	37,43 932	0,99 964	**30**
71	686	687	37,22 027	964	29
72	701	702	37,00 377	964	28
73	717	718	36,78 977	963	27
74	733	734	36,57 823	963	26
75	749	750	36,36 911	962	25
76	764	765	36,16 236	962	24
77	780	781	35,95 795	961	23
78	796	797	35,75 584	961	22
79	811	812	35,55 598	960	21
80	0,02 827	0,02 828	35,35 834	0,99 960	**20**
81	843	844	35,16 289	960	19
82	858	860	34,96 958	959	18
83	874	875	34,77 838	959	17
84	890	891	34,58 927	958	16
85	906	907	34,40 219	958	15
86	921	923	34,21 713	957	14
87	937	938	34,03 405	957	13
88	953	954	33,85 291	956	12
89	968	970	33,67 369	956	11
90	0,02 984	0,02 985	33,49 635	0,99 955	**10**
91	0,03 000	0,03 001	33,32 088	955	09
92	015	017	33,14 723	955	08
93	031	033	32,97 537	954	07
94	047	048	32,80 529	954	06
95	063	064	32,63 696	953	05
96	078	080	32,47 034	953	04
97	094	095	32,30 541	952	03
98	110	111	32,14 215	952	02
99	125	127	31,98 052	951	01
100	0,03 141	0,03 143	31,82 052	0,99 951	**00**
	Cos	Cotg	Tg	Sin	cgr

mgr	16	15
1	1,6	1,5
2	3,2	3,0
3	4,8	4,5
4	6,4	6,0
5	8,0	7,5
6	9,6	9,0
7	11,2	10,5
8	12,8	12,0
9	14,4	13,5

$$\operatorname{cotg} a'' = \frac{p}{a} - q \cdot a \qquad \begin{pmatrix} 0 < a'' < 3{,}5 \text{ gr} \\ 0 < a < 35000 \end{pmatrix}$$

$p = 636619{,}77$; $\log p = 5{,}80388$

$q = 0{,}000\,000\,5236$; $\log q = \overline{7}{,}71900$

cgr	Sin	Tg	Cotg	Cos	
00	0,56 208	0,67 960	1,47 146	0,82 708	**100**
01	221	0,67 983	7 096	699	99
02	234	0,68 006	7 046	690	98
03	247	029	6 996	682	97
04	260	052	6 947	673	96
05	273	075	6 897	664	95
06	286	098	6 848	655	94
07	299	121	6 798	646	93
08	312	144	6 749	637	92
09	325	167	6 699	629	91
10	0,56 338	0,68 190	1,46 649	0,82 620	**90**
11	351	213	6 600	611	89
12	364	236	6 551	602	88
13	377	259	6 501	593	87
14	390	282	6 452	584	86
15	403	305	6 402	575	85
16	416	328	6 353	567	84
17	429	351	6 304	558	83
18	442	374	6 254	549	82
19	455	397	6 205	540	81
20	0,56 468	0,68 420	1,46 156	0,82 531	**80**
21	481	443	6 106	522	79
22	494	466	6 057	513	78
23	507	489	6 008	504	77
24	520	512	5 959	496	76
25	533	536	5 910	487	75
26	546	559	5 861	478	74
27	559	582	5 811	469	73
28	572	605	5 762	460	72
29	585	628	5 713	451	71
30	0,56 597	0,68 651	1,45 664	0,82 442	**70**
31	610	674	5 615	433	69
32	623	697	5 566	424	68
33	636	720	5 517	416	67
34	649	744	5 468	407	66
35	662	767	5 419	398	65
36	675	790	5 370	389	64
37	688	813	5 322	380	63
38	701	836	5 273	371	62
39	714	859	5 224	362	61
40	0,56 727	0,68 882	1,45 175	0,82 353	**60**
41	740	906	5 126	344	59
42	753	929	5 077	335	58
43	766	952	5 029	327	57
44	779	975	4 980	318	56
45	792	0,68 998	4 931	309	55
46	804	0,69 021	4 883	300	54
47	817	045	4 834	291	53
48	830	068	4 785	282	52
49	843	091	4 737	273	51
50	0,56 856	0,69 114	1,44 688	0,82 264	**50**
	Cos	Cotg	Tg	Sin	cgr

cgr	Sin	Tg	Cotg	Cos	
50	0,56 856	0,69 114	1,44 688	0,82 264	**50**
51	869	137	4 639	255	49
52	882	161	4 591	246	48
53	895	184	4 542	237	47
54	908	207	4 494	228	46
55	921	230	4 445	219	45
56	934	254	4 397	210	44
57	947	277	4 348	201	43
58	960	300	4 300	193	42
59	972	323	4 252	184	41
60	0,56 985	0,69 347	1,44 203	0,82 175	**40**
61	0,56 998	370	4 155	166	39
62	0,57 011	393	4 106	157	38
63	024	416	4 058	148	37
64	037	440	4 010	139	36
65	050	463	3 962	130	35
66	063	486	3 913	121	34
67	076	510	3 865	112	33
68	089	533	3 817	103	32
69	101	556	3 769	094	31
70	0,57 114	0,69 579	1,43 721	0,82 085	**30**
71	127	603	3 672	076	29
72	140	626	3 624	067	28
73	153	649	3 576	058	27
74	166	673	3 528	049	26
75	179	696	3 480	040	25
76	192	719	3 432	031	24
77	205	743	3 384	022	23
78	217	766	3 336	013	22
79	230	790	3 288	0,82 004	21
80	0,57 243	0,69 813	1,43 240	0,81 995	**20**
81	256	836	3 192	986	19
82	269	860	3 144	977	18
83	282	883	3 096	968	17
84	295	906	3 048	959	16
85	308	930	3 001	950	15
86	320	953	2 953	941	14
87	333	0,69 977	2 905	932	13
88	346	0,70 000	2 857	923	12
89	359	023	2 809	914	11
90	0,57 372	0,70 047	1,42 762	0,81 905	**10**
91	385	070	2 714	896	09
92	398	094	2 666	887	08
93	411	117	2 619	878	07
94	423	140	2 571	869	06
95	436	164	2 523	860	05
96	449	187	2 476	851	04
97	462	211	2 428	842	03
98	475	234	2 381	833	02
99	488	258	2 333	824	01
100	0,57 501	0,70 281	1,42 286	0,81 815	**00**
	Cos	Cotg	Tg	Sin	cgr

61gr 61gr

mgr	50	49	48	47	24	23	13	12	9	8	mgr
1	5,0	4,9	4,8	4,7	2,4	2,3	1,3	1,2	0,9	0,8	1
2	10,0	9,8	9,6	9,4	4,8	4,6	2,6	2,4	1,8	1,6	2
3	15,0	14,7	14,4	14,1	7,2	6,9	3,9	3,6	2,7	2,4	3
4	20,0	19,6	19,2	18,8	9,6	9,2	5,2	4,8	3,6	3,2	4
5	25,0	24,5	24,0	23,5	12,0	11,5	6,5	6,0	4,5	4,0	5
6	30,0	29,4	28,8	28,2	14,4	13,8	7,8	7,2	5,4	4,8	6
7	35,0	34,3	33,6	32,9	16,8	16,1	9,1	8,4	6,3	5,6	7
8	40,0	39,2	38,4	37,6	19,2	18,4	10,4	9,6	7,2	6,4	8
9	45,0	44,1	43,2	42,3	21,6	20,7	11,7	10,8	8,1	7,2	9

KORRELS.

XXI. VAAG OF GAAF?

„Het is niet gemakkelijk aan te geven, waar bij het onderwijs in de mechanica de moeilijkheid precies zit. Bij elk hoofdstuk van dit leerboek is men geneigd de opmerking te maken, *dat eigenlijk een correcte behandeling toch minstens even gemakkelijk is als een simplistische; dat zij voor een critische geest zelfs de eenige gemakkelijk is*". (Cursivering van de redactie).

(Uit de bespreking door Prof. Van der Woude van het Leerboek der Mechanica van Prof. Schuh en Trotsenburg).

De redactie sluit zich volkomen aan bij deze woorden; inderdaad is het gave verre te verkiezen boven het vage!

XXII. SECANS EN COSECANS.

Ik heb nog steeds een exemplaar van

Lobatto's leerboek der rechtlijnige en bolvormige driehoeksmeting, 4e druk, bewerkt door Van Geer, Schoonhoven 1877 (De vlakke driehoeksmeting beslaat 106 blz., de boldriehoeksmeting 74 blz.; geen vraagstukken).

Het was mijn studieboek in het laatste decennium van de vorige eeuw voor L.O. en KI; het overleeft elke schoonmaak, wat van geen enkel schoolboek in de laatste 40 jaar verschenen, gezegd kan worden. Het is nog steeds een uitstekend boek in elk mogelijk opzicht. Die oude Lobatto gaf, gelijk toen gewoonte was, in het eerste hoofdstuk nog sinus versus $\alpha = 1 - \cos \alpha$ en cosinus versus $\alpha = 1 - \sin \alpha$; verderop helemaal niet meer. Ook secans α en cosecans α; de eerste twee zijn uit onze schoolboeken verdwenen. De laatste twee? Waarom zijn deze nog niet opgeruimd? Wat zijn het anders dan dingen, die men onmiddellijk omkeert? Moeten we ze daarvoor houden? Waarom $\text{tg}\ ^2\alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

en $1 + \cot^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$? Waarvoor is dat nodig? Verder worden deze formules immers niet gebruikt; secans en cosecans zijn schoolstof, in de les omdraai-objecten, meer niet; de wiskundige betekenis is van nul en gener waarde; ze maken alleen maar volte en drukte. Ik ben er voor ze maar gans en al op te ruimen in de schoolboeken, zoals de schrijvers na Lobatto—Van Geer sinus versus en cosinus versus hebben laten schieten. Secans en cosecans hebben een taai leven of liever: ze worden door enkele schrijvers bijzonder vertroeteld. Ik haal hier iets aan uit een boekje voor de 3e klas H.B.S., dat bestemd is voor leerlingen, die terecht maar een glimp moeten hebben van de goniometrie. Vet gedrukt:

„De logarithme van een cosecans van een hoek is het tegengestelde van de logarithme van de sinus van die hoek". (ik heb noch in de 25 jaargangen van het N. T. v. Wiskunde, noch in het grote leerboek ooit behoefte gehad aan log cosec! Wie wel??)

„$\sec \alpha_2 = - \sec (180^\circ - \alpha_2)$"; en meerdere van dit soort. Deze komen nooit voor dan opzettelijk gefabriceerd.

Schone opgaven als:

$$\frac{\sec(90^\circ + \alpha)\,\text{cosec}(90^\circ - \alpha)}{\text{cosec}(180^\circ + \alpha)} + \frac{\sec(180^\circ - \alpha)\;\text{cosec}(90^\circ + \alpha)}{\sec(180^\circ + \alpha)} \;!\,!$$

En wat te zeggen van een serie van 41 vraagstukjes, waarvan de helft secanten en cosecanten bevatten of er naar vragen.

Is het eigenlijk niet treurig? En is het wonder, dat deskundige buitenstaanders hun hoofd schudden over zulk volslagen gemis aan inzicht en dat ze klagen gelijk Prof. Tienstra over „de vele stofnesten in de wiskunde-literatuur"?

Dat secans en cosecans in bijzondere vakken nog wel voorkomen, is geen reden ze in de schoolboeken te houden. In de driehoeksmeting voor de zeevaartkunde treft men ze aan, ook sinus versus en cosinus versus. In de boeken voor landmeetkunde ook secans en cosecans. In studiewerken over gonio- en trigonometrie mogen secans en consecans natuurlijk niet ontbreken. Maar op school...... weg er mee en zeer zeker voor de derde klas, die maar een schijntje van het vak nodig heeft.

W.

XXIII.

CONSTRUCTIE VAN $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

In het jaar 1759 publiceerde de verdienstelijke mathematicus en physicus Johann Andreas von Segner uit Göttingen in de werken van de Petersburgsche Akademie een methode van de grafiek van de functie:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_n$$

werkelijk te construeeren, en wel uitsluitend door het trekken van rechte lijnen. Zijn verhandeling draagt den titel: „Methodus simplex et universalis, omnes omnium aequationem radices detegendi", dus: „een eenvoudige en algemeene methode om van alle vergelijkingen alle wortels te ontdekken". Wij willen haar uiteenzetten aan het voorbeeld:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Laat $OQ = 1$, $OP = x$ zijn; verder $OD = d$, $DC = c$, $CB = b$, $BA = a$. Dan is het punt a uit de figuur het punt der kromme voor $x = 1$.

Verbind nu a met B, geef het punt b aan, en daarna, door een horizontale lijn, e. Verbind c met C, geef c_1 en d aan, dan is d_1 het punt der kromme voor de aangenomen waarde x.

Voor het bewijs heeft men slechts de stukken I, II, III uit te rekenen.

$$\text{I}: \quad a = (1-x) : 1.$$
$$\text{I} = a - ax.$$
$$Cp = a + b - a + ax = ax + b.$$
$$\text{II}: \quad (ax + b) = (1 - x) : 1.$$
$$\text{II} = (ax + b)(1 - x)$$
$$Dq = c + b + a - \text{I} - \text{II} = ax^2 + bx + c.$$

Rekent men nu nog III uit, en neemt dan:

$(a + b + c + d) - (\text{I} + \text{II} + \text{III})$, dan vindt men: $ax^3 + bx^2 + cx + d$, dus de y, behoorende bij de aangenomen waarde x.

Hk. de Vries.

DOEL EN ZIN VAN HET MEETKUNDE-ONDERWIJS.

Verslag van de Vergadering van de Wiskundewerkgroep van de Werkgemeenschap tot Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding op Zaterdag 27 *November* 1937 *in de Sterrewacht te Utrecht.*

Het onderwerp van deze vergadering werd ingeleid door Dr E. W. Beth;[1] in het volgende wordt gegeven de tekst van deze inleiding en een samenvatting van de daarna gehouden discussie.

INLEIDING.

Het zou aanmatigend kunnen schijnen, dat iemand met zo geringe ervaring op het gebied van het onderwijs het woord neemt, om een discussie in te leiden over de vraag: wat is het doel (de zin) van het meetkunde-onderwijs? Men zou geneigd kunnen zijn, aan beginners de raad te geven, het behandelen van didactische problemen aan meer ervaren lieden over te laten. Hiertegen kan echter worden aangevoerd, dat het hier te bespreken probleem niet van didactischen aard is; integendeel, men zal zich op dit probleem hebben te bezinnen, vóór men overgaat tot de behandeling van de didactische problemen, die zich voordoen, wanneer men zijn doelstelling practisch tracht te verwezenlijken. Het probleem van het doel van zijn onderwijs *moet* en *kan* ook de beginner overdenken. Hij moet dit, omdat bij ontstentenis van een met bewustzijn vooropgesteld doel aan zijn onderwijs elke lijn zal ontbreken; hij kan het, omdat aan doelstellingen principieel elk beroep op de ervaring vreemd is. Heeft hij evenwel eenmaal voor zijn onderwijs een bepaalde doelstelling aanvaard, dan zal hij, om deze te verwezenlijken, niet mogen nalaten, met de rijkere ervaring van anderen zijn voordeel te doen. In elk geval is het volkomen zinloos, een oordeel uit te spreken over methode of resultaat van enige vorm van onderwijs, vóór men van het doel van dat onderwijs een heldere voorstelling bezit.

Op grond van dergelijke overwegingen zijn alle leden uitgenodigd, hun mening omtrent het doel van het meetkunde-onderwijs schriftelijk mee te delen; ik heb de inzendingen, 14 in getal, bestudeerd; een overzicht ervan vindt men in het verslag van de discussie; thans moge ik volstaan met de mededeling, dat men het wel algemeen hierover eens is, dat het *meetkunde-onderwijs aan onze scholen tot doel heeft, bij te dragen tot de intellectuele vorming*. Ik wil de vraag, of het meetkunde-onderwijs daartoe *kan* bijdragen, en zo ja, onder welke voorwaarden, ter zijde laten, om meer in détails te onderzoeken, waarin de als doel aanvaarde intellectuele vorming eigenlijk bestaat.

Wat men gewoonlijk samenvat onder de naam van „intellectuele vorming" valt m.i. in een aantal onderdelen uiteen, die echter met elkaar in wisselwerking staan.

1) De ontwikkeling van het individuele denken; hiertoe behoort (volgens Kohnstamm) het zich leren orienteren, het leren ordenen, het leren combineren.

2) De ontwikkeling van de individuele taalbeheersing.

3) De ontwikkeling van het formeel-logisch redeneren als middel tot geordende uitwisseling van gedachten; in nauw verband hiermee:

4) Aanpassing van de individuele denk- en spreekgewoonten aan de maatschappelijk gangbare.

5) Kennismaking met het wetenschappelijk denken en zijn resultaten.

Ik wil de hier gemaakte onderscheiding nog iets nader toelichten.

Aan ons menselijk bewustzijn is een ordenende en wetgevende functie eigen, die zich enerzijds richt op de objecten van onze bewustzijnsinhouden, anderzijds op ons bewust handelen; men onderscheidt daarom in de uitoefening van de bedoelde functie het *denken* en den *wil*.

Ik wil er aanstonds de aandacht op vestigen, dat het *redeneren* van het denken moet worden onderscheiden; onder redeneren zal hier worden verstaan de geordende uitwisseling van gedachten.

Aan het menselijk denken is een zekere mate van regelmaat eigen; niet alleen vertoont het denken van elk individu op-zich-zelf zekere regelmatigheden; overeenkomstige regelmatigheden keren

ook bij andere individuen terug. De bedoelde regelmaat is in aanleg een biologisch verschijnsel; ze wordt evenwel om redenen van maatschappelijken aard versterkt, en krijgt daardoor mede een sociaal karakter. De besproken regelmatigheden in de denkprocessen van verschillende mensen maken uitwisseling van gedachten tussen mensen althans in principe mogelijk.

Practisch wordt het uitwisselen van gedachten tussen mensen mogelijk gemaakt door het formeel-logisch redeneren. Het formeel-logisch redeneren berust op een (zoals bekend, in hoge mate onvolledig) parallelisme tussen de regelmatigheden in het *denken* en die in het *spreken*. Dit parallelisme stelt den spreker in staat, de gedachtengang van den hoorder doelbewust te beïnvloeden. Evenals de regelmatigheden in het denken en het spreken elk voor zich genomen bezit ook het parallelisme ertussen in hoge mate een sociaal karakter, inzoverre een volgens de regels van de logica voltrokken redenering positieve weerklank pleegt te vinden.

De grote maatschappelijke betekenis van de gedachtenwisseling tussen mensen leidt er noodzakelijkerwijs toe, dat de regelmatigheden in spreken en denken evenals het parallelisme tussen beide zoveel doenlijk worden versterkt. Enerzijds leidt het opmerken van de regelmatigheden in het redeneren van anderen het individu ertoe, zijn eigen denk- en spreekgewoonten bij de maatschappelijk gangbare aan te passen, aan de andere kant worden de bedoelde regelmatigheden en het besproken parallelisme meer en meer geaccentueerd (formalisatie van de taal; als uiterste consequentie de logistiek). De factische en principiële tekortkomingen van de menselijke verstandhoudingsmiddelen vormen evenzovele hinderpalen voor de uitwisseling van gedachten en daardoor mede voor het tot-stand-komen van een gezonde menselijke samenleving. Het is een maatschappelijk belang van de allerhoogste orde, dat althans de factische tekortkomingen worden uitgeschakeld. Hier ligt óók voor ons onderwijs een belangrijke taak.

Hoe gaat nu de intellectuele ontwikkeling, die volgens het bovenstaande eigenlijk beschouwd moet worden als een samenstel van zeer uiteenlopende ontwikkelingsprocessen, in haar werk? Ik kan natuurlijk deze vraag niet dan zeer onvolledig beantwoorden en beperk me daarom tot een bespreking van enkele phasen van de intellectuele vorming.

De eerste phase in de ontwikkeling van de intelligentie, waarin het individuele denken nog hoofdzaak is, terwijl van uitwisseling van gedachten weinig of geen sprake is, laat zich opvatten als een biologisch rijpingsproces, dat voor opzettelijke beïnvloeding slechts inzover vatbaar is, dat het kan worden bevorderd, door het individu te plaatsen in een omgeving, die stimuleert tot persoonlijke activiteit; door mededeling is echter slechts weinig te bereiken. Deze phase der intellectuele ontwikkeling bestaat in het opbouwen van een tweetal geordende voorstellingscomplexen, die ik, in aansluiting bij Mannoury, aanduid als het physisch en het linguistisch complex. De directe verbingen tussen deze beide complexen zijn oorspronkelijk gering in aantal; de regelmatigheden in de natuurverschijnselen worden wel „waargenomen", maar niet „onder woorden gebracht" Het taalgebruik is nog in hoge mate „emotioneel", het „indicatieve" element staat op de achtergrond. Zowel het physisch als het linguistisch complex zijn nog sterk aan het gevoels- en wilsleven gebonden. De geringe directe binding tussen physisch en linguistisch complex heeft ten gevolge, dat van de geleidelijke ontwikkeling van het physisch complex bij het kind naar buiten niets blijkt: het kind kan er niets over vertellen; veelbetekenend is in dit verband de late ontdekking van het eidetisch waarnemen bij kinderen.

De tweede phase in de ontwikkeling van de intelligentie heeft tot functie, tussen het physisch en het linguistisch complex een nauwere binding tot stand te brengen. Het leren tellen hoort in deze phase thuis. De bindingen van het physisch complex met het gevoels- en wilsleven treden nu enigszins op de achtergrond. Door de binding van de elementen van het physisch complex en van hun onderlinge bindingen aan woordbeelden worden ze beter onthouden en gemakkelijker overzien.

De derde phase treedt in, wanneer de algemene intelligentie alsmede het physisch en het linguistisch complex en de bindingen ertussen zo ver ontwikkeld zijn, dat een uitbreiding ervan door blote mededeling mogelijk is. Deze phase wordt wellicht door slechts betrekkelijk weinig individuen ten volle bereikt.

In deze phase eerst kan het individu zich rekenschap geven van de regelmatigheden in eigen denken en spreken en van het partieel parallelisme daartussen. Het logisch redeneren kan nu worden

aangeleerd, en als gevolg daarvan ook het logisch denken; er is m.i. gegronde reden om aan te nemen, dat een spontane ontwikkeling van het logisch denken en redeneren niet mogelijk is; immers, het logisch denken en redeneren is, zoals reeds werd uiteengezet, een verschijnsel van maatschappelijke, niet van individueel-psychologische aard.

Het komt me voor, dat in de derde phase van de intellectuele ontwikkeling een plaats is voor systematisch meetkunde-onderwijs. In deze phase is nl. een intellectueel peil bereikt, waarop dit onderwijs vrucht kan dragen; bovendien geeft dit onderwijs aan den geest juist het voedsel, dat hij in deze phase voor zijn ontwikkeling behoeft. Op het gebied van de meetkunde immers blijkt wel zeer overtuigend de doelmatigheid van het logisch redeneren: als men maar „juist" redeneert, blijkt het verkregen resultaat steeds „juist" te zijn. Hier ligt het grote onderscheid met het taalonderwijs, dat overigens, ik behoef dit na het voorgaande niet nader te betogen, onmisbaar is te achten: dáár kan de leerling door consequente toepassing van de geleerde regels tot fouten komen, zolang hij bepaalde uitzonderingen op die regels niet kent. De doelmatigheid van juist redeneren blijkt bij het taalonderwijs dus niet.

Het behoeft geen betoog, dat men, naast de in deze inleiding op de voorgrond geplaatste doelstelling, er nog andere kan aanvoeren; dat hebben de leden van onze werkgroep ook gedaan, zoals uit het verslag van de discussie nog zal blijken. Intussen is het toch zeer verheugend, dat de hier meer in het bijzonder besproken doelstelling, naast andere, door allen wordt onderschreven. Het feit, dat wij allen bij ons onderwijs in de meetkunde eenzelfde doel nastreven, verschaft immers een grondslag aan onze discussie over een aantal andere vragen, die zich met betrekking tot dit onderwijs aan ons voordoen, bv. over het algemeen-verplicht stellen ervan, de exactheid, die men zal nastreven, de moeilijkheid en aard der vraagstukken, de noodzakelijkheid van een propaedeutische cursus, de keuze en de indeling (volgorde) van de te behandelen onderwerpen, enz. Enkele van deze vragen laten zich, na aanvaarding van een bepaalde doelstelling, op zuiver theoretische gronden beantwoorden. Zo zal, wie het meetkunde-onderwijs beschouwt als middel tot intellectuele vorming, streven naar de

bereikbare mate van exactheid, desnoods ten koste van de omvang van de leerstof; hij zal dit onderwijs willen geven aan alle leerlingen, die voor het volgen ervan geschikt zijn; wie daarentegen vooral van utiliteitsoverwegingen uitgaat, zal de practisch toepasbare onderdelen zo uitvoerig mogelijk behandelen, desnoods ten koste van de exactheid; hij zal de leerlingen, die in hun later leven geen meetkundige kennis nodig hebben, gaarne van het onderwijs vrijstellen. Deze opmerking is alleen als voorbeeld bedoeld.

Andere vragen daarentegen eisen voor hun beantwoording een beroep op de gegevens van de ervaring; ik denk hier aan de vraag: welk peil van wiskundige exactheid is op de middelbare school bereikbaar? Deze vragen behoren thuis op het terrein van de eigenlijke practische didactiek, waarop ik me, om aan het begin van deze inleiding aangegeven redenen, niet wil begeven.

DISCUSSIE.

Na deze inleiding ontspon zich een zeer levendige discussie, die zich tenslotte uitkristalliseerde in de volgende stellingen, waarin tevens de oorspronkelijk op de besproken vraag door de leden ingezonden antwoorden zijn verwerkt:

Stelling I. Het doel (de zin) van het meetkunde-onderwijs is gelegen in

a. de scholing van het verstand, de intellectuele vorming [1]),

b. de paedagogisch-ethische en aesthetische waarde,

c. de cultureel-sociale betekenis van de meetkunde.

Stelling II. De meetkunde kan de sub *a* genoemde vorming zo bij uitstek doeltreffend bevorderen, omdat zij

a. betrekking heeft op visuele voorstellingen, die een brug vormen naar het zuiver abstracte denken en de overgang naar de derde phase in de ontwikkeling van de intelligentie kunnen helpen bevorderen,

b. met betrekkelijk eenvoudige gegevens reeds tot het opbouwen van logische redeneringen kan voeren,

c. *steeds* de doelmatigheid van het logisch redeneren in het licht stelt.

---

[1]) De utiliteitsoverweging: de meetkunde is nodig als hulpwetenschap voor natuurkunde en techniek, werd wel even genoemd, doch trad later niet meer naar voren.

Stelling III. Het tegenwoordig meetkunde-onderwijs op de middelbare school voldoet niet in alle opzichten aan de eisen, die daaraan moeten worden gesteld, wanneer men de in Stelling I geformuleerde doelstelling in haar gehelen omvang wil verwezenlijken.

Stelling IV. Dergelijk meetkunde-onderwijs ware voor *een ieder* wenselijk, onverschillig wat zijn latere werkkring moge zijn.

Stelling V. Men dient hiermee evenwel pas te beginnen, wanneer de in de inleiding besproken derde phase in de ontwikkeling van de intelligentie is ingetreden.

Toelichting.

ad Ia. Deze scholing omvat

1. zich leren oriënteren,
2. leren ordenen, d.i. hoofdzaken van bijzaken scheiden, het essentiële uit de bijkomstigheden halen, het probleem dus „verwiskundigen",
3. leren combineren, d.i. systematisch leren opbouwen, logisch redeneren,
4. leren de gevolgde gedachtengang nauwkeurig te formuleren, d.i. taalbeheersing,
5. leren zien, dat het onderhavige geval een onderdeel is van een groter geheel, denksprongen naar wijder mogelijkheden leren maken.

ad Ib. In dit verband werd in de ingekomen antwoorden gewezen op de geestelijke verdieping, de belangeloze belangstelling, de zelftucht ten opzichte van exact woordgebruik, de verantwoordelijkheid voor uitgesproken beweringen, de intellectuele eerlijkheid, het consequent denken en handelen, de eerbied voor grootse scheppingen van de menselijke geest; allemaal ethische waarden, die het meetkunde-onderwijs tot erkenning kan brengen.

Verder kweekt het beoefenen van de meetkunde een zeker concentratievermogen en een zeker psychisch evenwicht aan.

Tenslotte is het bouwwerk der meetkunde schoon.

ad Ic. Cultureel is de meetkunde een groots bezit, door de gehele mensheid opgebouwd, en waard, er kennis van te nemen. Sociaal bezien, kan het aankweken van doelmatige denk- en spreek-

gewoonten en het bestrijden van wanbegrip het tot-stand-komen van redelijke verstandhouding tussen mensen bevorderen.

ad III. Een goede meetkunde-cursus moet achtereenvolgens de vijf stadia, ad Ia genoemd, helpen ontwikkelen, wellicht, door de stof in steeds wijder concentrische leergangen telkens weer te behandelen. Hoe óók de ad Ib en Ic genoemde waarden tot hun recht kunnen worden gebracht, moet echter nog aan een nadere beschouwing worden onderworpen.

Naar aanleiding van de discussies werd het volgende werk- en wensprogramma opgesteld:

A. Het is gewenst, het meetkunde-onderwijs te herzien, in dier voege, dat aan alle bovengenoemde eisen op bevredigender wijze wordt voldaan. Wij moeten onderzoeken, of deze herziening

a. principieel zal moeten zijn, dan wel, zo goed mogelijk aansluitend bij het historisch gegroeide, tot een voorbereidende cursus met eventueel enige verandering in de huidige behandelingswijze zal leiden,

b. van zuiver didactische, dan wel mede van wiskundigen aard zal zijn.

B. Het is gewenst, te onderzoeken, hoe het onderwijs op de lagere scholen zou zijn in te richten, opdat daar een goede grondslag voor het bouwwerk der middelbare scholen gelegd worde.

C. Het is gewenst, te trachten, tot een zuivere toetsing te komen van het ogenblik, waarop het meetkunde-onderwijs aan den mens met vrucht gegeven kan worden, dus zowel psychologisch, als biologisch verantwoord is.

OVER HET BEREKENEN VAN LIJNSTUKKEN EN OPPERVLAKTEN IN DE SCHOOLMEETKUNDE.

DOOR

E. W. BETH.

Sinds een aantal jaren worden van tijd tot tijd min of meer ingrijpende wijzigingen in de sinds lange tijd in vrijwel onveranderde vorm gevolgde meetkunde-cursus voorgesteld. De overwegingen, die daarbij voorzitten, zijn zeer verschillende. Enerzijds wil men de exactheid van het meetkunde-onderwijs verhogen, anderzijds, vaak ten koste desnoods van de exactheid, de meetkunde voor de schooljeugd toegankelijker maken; voorts zal men bij onderwijsinrichtingen van meer technisch karakter de practisch toepasbare gedeelten van de meetkunde meer op de voorgrond willen plaatsen.

De voorgestelde veranderingen wil ik slechts nader beschouwen, voor zover ze de leerstof, en niet de onderwijsmethode, betreffen; men kan dan onderscheiden voorstellen tot toevoeging en schrapping van bepaalde onderdelen der leerstof en voorstellen tot wijziging van de volgorde der behandelde onderwerpen.

Het is nu bij de beoordeling van dergelijke voorstellen van belang, dat men scherp onderscheid maakt tussen die onderwerpen, die op zich zelf voor den leerling van belang zijn (hetzij door de practische, hetzij door de vormende waarde), en die onderwerpen, die slechts dienen, om de eerste te funderen of toe te lichten. Men zal zich ten opzichte van de laatstbedoelde onderwerpen meer vrijheid kunnen veroorloven, dan ten opzichte van de eerstbedoelde, waaraan men natuurlijk geen afbreuk van betekenis zal kunnen doen.

Tot die onderdelen van de meetkunde, die, afgescheiden van hun plaats in een of ander axiomatisch systeem, een zekere eigen betekenis bezitten, behoort in de eerste plaats het hoofdstuk „Berekening van lijnen en oppervlakten". Voor het practisch leven is

eigenlijk alleen dit hoofdstuk van belang; het is dan ook voor de meetkunde oorspronkelijk het punt van uitgang geweest, zoals nu nog uit de naam van deze wetenschap kan blijken.

Het zal daarom, in de gedachtengang van bovenstaande alinea's, van enig belang zijn, te onderzoeken, welke overige onderdelen van de meetkunde voor de fundering van dit hoofdstuk van node zijn.

In de thans gebruikelijke leergang is die fundering tamelijk omvangrijk: men gebruikt de leer der congruentie, de theorie der parallelen en de daarvan afhankelijke theorie der gelijkvormigheid; men leidt hieruit eerst de berekening van lijnstukken en daarna de berekening van oppervlakten af.

Wanneer men nu, gewend aan deze wijze van behandeling, de „Elementen" van Euclides opslaat, bemerkt men, gemeenlijk niet geheel zonder verrassing, dat de volgorde van de hoofdstukken een geheel andere is; hier volgt op de behandeling van de evenwijdigheid en de congruentie de stelling van Pythagoras als betrekking, niet tussen de lengten van de zijden van een rechthoekige driehoek, maar tussen de oppervlakten van de op die zijden beschreven vierkanten. Daarop volgt dan in het tweede Boek de beroemde oppervlakte-rekening, terwijl de gelijkvormigheid eerst in het zesde Boek ter sprake komt; zonder mij hier nader in détails te begeven (ik verwijs hiervoor naar het bekende werk van Dr. E. J. Dijksterhuis: „De Elementen van Euclides", Groningen 1929/30, en naar een nog te publiceren eigen historisch-psychologische studie over de euclidische meetkunde) wil ik, ter gedeeltelijke verklaring van dit merkwaardig verschil tussen de griekse en de huidige behandelingswijze, opmerken, dat voor de griekse wiskundigen niet het uitdrukken van lengten en oppervlakten door getalwaarden het probleem van het hier te behandelen hoofdstuk der meetkunde was, maar het (met passer en lineaal) construeren van figuren met gegeven lengte of oppervlakte.

De verandering in behandelingswijze is dus in zekere zin uitvloeisel van een verandering van probleemstelling; deze verandering van probleemstelling hangt op haar beurt samen met de verandering van oriëntatie, die het wiskundig denken omstreeks 1600 heeft ondergaan: in plaats van de overwegend qualitatieve be-

schouwingswijze van de Grieken trad de quantitatieve; tegenwoordig valt een duidelijke terugkeer tot de qualitatieve beschouwingswijze te constateren (verg. van schr. dezes „Descartes' Idee ener „Mathesis Universalis" en haar Betekenis voor de Natuurphilosophie", Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsb. en Psych., **31**, 1937/38, blz. 41). Verder is waarschijnlijk van invloed geweest de hernieuwde oriëntering van het wiskundig denken aan de practijk van natuurwetenschap en techniek. Tenslotte moet worden genoemd de door Ramus, Bacon en vele anderen gepropageerde reactie op de overheersende autoriteit van de Griekse wetenschap.

Onder invloed van al deze stromingen zien langzamerhand leerboeken der meetkunde het licht, die zich in verschillende opzichten van het door Euclides geschapen prototype verwijderen. Ik wil hiervan, zonder ook maar een ogenblik naar volledigheid te streven, enkele voorbeelden aanvoeren.

A. C. Clairaut, „Elements de Géométrie" (1746). Clairaut wil den beginners de toegang tot de meetkunde vergemakkelijken, door het opmeten van terreinen en de problemen, die zich daarbij voordoen, als uitgangspunt te kiezen. Hij behandelt dus, uitgaande van de parallelentheorie, eerst de beginselen van de oppervlakte-berekening. Later wordt, op grond van de theorie van de gelijkvormigheid, de vergelijking van oppervlakten op zuiver meetkundige (dus aan de Euclidische methode herinnerende) wijze voortgezet; de stelling van Pythagoras wordt nog beschouwd als een stelling over oppervlakten. De berekening van lengten komt niet ter sprake, wel (merkwaardigerwijze) de bepaling van de omtrek van de cirkel. Het boek is ook thans nog interessant, vooral uit didactisch oogpunt.

A. M. Legendre, „Eléments de Géométrie" (1794). In dit werk wordt, evenals bij Euclides, de theorie van de oppervlakten, maar nu in quantitatieve interpretatie, onmiddellijk op de theorie der congruentie en der evenwijdigheid gefundeerd; hierop volgt dan de berekening van lijnen, terwijl eerst daarna de gelijkvormigheid ter sprake komt.

S. F. Lacroix „Essais sur l'Enseignement" (1805). Lacroix heeft (cf. M. Cantor, „Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik , Bd IV, Leipzig 1908) scherpe critiek op de door Euclides gevolgde werkwijze, hij noemt de verdeling van de

stof onordelijk; zo maakt hij er aanmerking op, dat Euclides de grondstelling over de evenredigheid van lijnen (VI, 2) afleidt door vergelijking van de oppervlakte van driehoeken.

Onder invloed van deze en dergelijke kritiek is dan de thans meest gevolgde leerwijze tot stand gekomen.

Het is echter twijfelachtig, of men deze verandering in de volgorde van de hoofdstukken der elementaire meetkunde moet toejuichen; bij nadere beschouwing immers blijkt de euclidische behandeling bijzonder aanschouwelijk en sierlijk. Het is daarom mijn bedoeling een schets te geven van een met de euclidische in wezen overeenstemmende, echter met moderne inzichten beter strokende wijze van behandeling; de uiterste strengheid en volledigheid streef ik niet na (ter aanvulling verwijs ik naar het pas verschenen werk van Prof. Dr. B. L. van der Waerden „De logische Grondslagen der Euklidische Meetkunde", Groningen 1937); ik wil daarna nog aangeven, hoe men deze theorie kan gebruiken ter fundering van de parallelen- en gelijkvormigheidstheorie. Ik vooronderstel de inleidende hoofdstukken der elementaire meetkunde tot en met de congruentieleer, met uitzondering van de theorie der parallelen. Verder ga ik uit van de volgende axioma's:

I. Overal in het platte vlak kan men met willekeurig gegeven zijden een rechthoek construeren (dit axioma vervangt het parallelenpostulaat).

II. Aan elke veelhoek A is toegevoegd een grootheid O(A), de *oppervlakte* van A, zodanig, dat

a) voor elke A, B, en C geldt

$$O(A) = O(A),$$
$$O(A) < O(B) \text{ òf } O(A) = O(B) \text{ òf } O(A) > O(B),$$
$$\text{uit } O(A) = O(B) \text{ volgt } O(B) = O(A),$$
$$\text{uit } O(A) = O(B) \text{ en } O(B) = O(C) \text{ volgt } O(A) = O(C),$$
$$\text{uit } O(A) < O(B) \text{ en } O(B) < O(C) \text{ volgt } O(A) < (OC),$$

b) $$\text{uit } A \cong B \text{ volgt } O(A) = O(B),$$

c) $$O(A) + O(B) = O(B) + O(A),$$

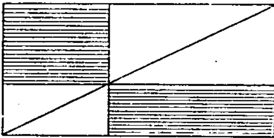
d) voor een uit delen op B en C opgebouwde veelhoek A geldt

$$O(A) = O(B) + O(C),$$
$$O(B) < O(A),$$

e) uit $O(A) + O(C) = O(B) + O(C)$ volgt $O(A) = O(B)$ en omgekeerd.

Mijn doel is nu, aan te tonen, dat men de oppervlakten kan *meten,* d.w.z., aan elke grootheid O(A) een reëel getal M(A) (de „getalwaarde" van O(A)) kan toevoegen, zodanig, dat uit $O(A) \lesseqgtr O(B)$ volgt $M(A) \lesseqgtr M(B)$ en omgekeerd, en dat tevens uit $O(A) + O(B) = O(C)$ volgt $M(A) + M(B) = M(C)$ en omgekeerd.

Daar elke veelhoek als uit driehoeken samengesteld kan worden beschouwd, is het volgens IId voldoende te bewijzen, dat men driehoeken kan meten; men kan verder bij elke driehoek een rechthoek met dezelfde oppervlakte construeren. Men construeert tenslotte bij elke rechthoek een rechthoek, die dezelfde oppervlakte bezit, als de eerste, en die bovendien een gegeven basis bezit; daarmee is dan de meting van de oppervlakte teruggebracht tot de meting van de opstaande zijde van de tweede rechthoek, in het geval, dat men voor de gegeven basis de lengte-eenheid heeft gekozen. De mogelijkheid van lengtemeting worde daarom *gepostuleerd.* [1])



Dan moet nog worden aangetoond, dat het hier geschetste procédé een ondubbelzinnig bepaald resultaat oplevert. Neem aan, dat men voor eenzelfde veelhoek A bij meting op twee verschillende manieren twee verschillende getalwaarden $M'(A)$ en $M''(A)$ verkrijgt, en zij $M'(A) < M''(A)$. Dan zouden er dus twee rechthoeken A′ en A″ zijn, waarvoor krachtens constructie zou gelden

$$O(A') = O(A) \qquad\qquad O(A'') = O(A)$$

dus krachtens IIa

$$O(A') = O(A''),$$

Verder zouden ze dezelfde basis bezitten, terwijl de opstaande zijde van A′ kleiner zou zijn dan die van A″. Volgens IId zou dus gelden

$$O(A') < O(A''),$$

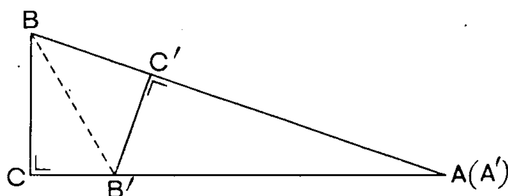
waarmee uit de onderstelling van tweeërlei resultaat een contradictie is verkregen.

---

[1]) Ik doe dit alleen kortheidshalve; men doet natuurlijk beter, een aantal axioma's van meer meetkundig karakter te formuleren, waaruit de mogelijkheid van lengtemeting kan worden afgeleid; cf. Van der Waerden l.c.

Men kan op de gebruikelijke wijze laten zien, dat de getalwaarde van de oppervlakte van een rechthoek gelijk is aan het product van de getalwaarden van de lengten der zijden; de daarbij voor het geval van onderling onmeetbare zijden nodige limietovergangen zijn gerechtvaardigd door IId. Hieruit volgt dan de getalwaarde van de oppervlakte van een driehoek met gegeven lengten van basis en hoogte. Men kan nu de stelling van Pythagoras afleiden, b.v. met behulp van het mooie „Indische bewijs", en heeft daarmee dan alles, wat nodig is voor het berekenen van lengten en oppervlakten. Het bovenstaande is natuurlijk niet voor behandeling in de klasse bestemd; datgene, wat voor de schooljeugd toegankelijk is te achten, is te vinden in P. Wijdenes en Dr. D. de Lange, „Vlakke Meetkunde" (ook de „Meetkundige Vraagstukken" van P. Wijdenes volgen deze methode); ik verwijs daarnaar ook voor enkele eenvoudige afleidingen, die ik hier achterwege moest laten.

Ik wil nu aangeven, hoe men, uitgaande van de reeds verkregen resultaten, ook de theorie van de parallelen en de gelijkvormigheid kan afleiden.



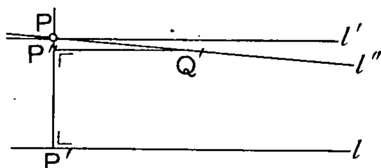
Om te beginnen, bewijs ik: zijn in twee driehoeken ABC en A'B'C' de hoeken C en C' recht en is verder $\angle A = \angle A'$, dan geldt $a : a' = b : b' = c : c'$; leg A'B'C' zó op ABC, dat A' in A, C' op AB en B' op AC terecht komt.

Dan is $O(ABB') = \frac{1}{2}\, a'c = \frac{1}{2}\, ac'$, dus $a : a' = c : c'$, enz.

Men kan deze stelling als volgt omkeren: vormen van twee rechthoekige driehoeken twee paren zijden een evenredigheid, dan zijn alle paren evenredig en de scherpe hoeken zijn paarsgewijze gelijk; het eerste deel van het gestelde volgt uit de stelling van Pythagoras. Men construeert nu een derde rechthoekige driehoek A″B″ C″ met $\angle A'' = \angle A$ en $c = c'$. Dan is op ABC en A″ B″ C″ de vorige stelling van toepassing, waaruit volgt, dat A'B'C' en A″B″C″ volgens ZZZ congruent zijn; daaruit kan men tot het tweede deel van het gestelde besluiten.

Verder bewijs ik: door een punt P kan men een rechte lijn

trekken, die een rechte l, die niet door P gaat, niet snijdt; laat uit P de loodlijn PP′ op l neer, dan is de loodlijn l' in P op PP′ de gevraagde rechte; immers, bezaten l en l' een snijpunt Q, dan zou, in strijd met axioma I, de constructie van de rechthoek met basis PP′ en opstaande zijde PQ mislukken.



Ook van deze stelling is een omkering waar: l' is de énige lijn door P, die l niet snijdt; zij nl. l'' een tweede lijn door P. Kies Q′ op die helft van l'', die met PP′ een scherpe hoek maakt, en zó, dat PQ′ $<$ PP′. Trek de loodlijn Q′P″ uit Q′ op PP′, dan zal P″ tussen P en P′ liggen; construeer nu een driehoek, rechthoekig in P′, met als ene rechthoekszijde PP′ en met een tweede rechthoekszijde, gelegen aan dezelfde zijde van PP′, als P″Q′, en groot

$$P'Q = \frac{PP'}{PP''} \times P''Q'.$$

Volgens een reeds bewezen stelling is dan QPP′ = Q′PP″. Dus is Q het snijpunt van l en l''.[1])

Tenslotte bewijs ik nog, dat l'' de lijnen l en l' volgens gelijke verwisselende binnenhoeken snijdt; construeer de rechthoek met zijden PP′ en P′Q. De diagonaal PQ verdeelt de rechthoek in twee congruente driehoeken, waaruit het gestelde volgt.

Ik wil uit het bovenstaande de conclusie trekken, dat een leergang der elementaire euclidische meetkunde denkbaar is, waarin de berekening van lengten en oppervlakten onmiddellijk op de theorie der congruentie wordt gefundeerd, zonder dat men gebruik behoeft te maken van parallelisme of gelijkvormigheid. De wijze, waarop déze onderwerpen dan te voorschijn komen, is wellicht iets minder sierlijk; dit bezwaar is niet zo groot, als het lijkt, omdat de betekenis van deze begrippen in een dergelijke leergang geringer is, dan in de gebruikelijke.

Overveen, Januari 1938.

---

[1]) Hiermee is dus aangetoond, dat axioma I inderdaad gelijkwaardig is met het parallelenpostulaat, dat hier immers uit axioma I is afgeleid.

MEETKUNDIGE CONSTRUCTIES

DOOR

Dr. D. P. A. VERRIJP †.

Planimetrische Constructies. [1])

Het leek mij niet onbelangrijk eens tot een geheel te vereenigen, wat men aan de eenigszins gevorderde en belangstellende leerlingen wel van het aan het hoofd van dit artikel genoemde onderwerp kan of zou kunnen meedeelen, zonder het elementaire gebied der planimetrie te verlaten. Nu ik dit hier tracht te doen, moet ik echter over twee onderwerpen, die ik zal aanroeren, even iets zeggen. Vooreerst zal ik spreken over „inversie". Op de meeste scholen zal de inversie wel niet besproken worden. Het komt mij echter voor, dat men goed doet daarvan wèl een en ander te behandelen. Veel tijd kost het niet en de leerlingen krijgen er toch een middel door onder hun bereik, dat in verschillende opzichten, ook voor latere studie, van belang is. In de tweede plaats zal ik de in de projectieve meetkunde schering en inslag vormende „dubbelverhouding" noemen. Daar echter het werken met dubbelverhoudingen wel in 't geheel niet in ons elementair onderwijs zal voorkomen, zal ik *alleen* in een aanhangsel (kleine letter) met behulp van deze grootheden zeer in 't kort een aanvulling van het onderwerp geven.

1. Er bestaat een algemeene meetkunde en er zijn bijzondere meetkunden. De algemeene Euclidische meetkunde, bijvoorbeeld, leidt al haar stellingen af uit een systeem van axioma's, dat door Hilbert wel zeer goed en, naar wij meenen, wel zeer volledig is uitgesproken. Toch is die meetkunde, laat ik zeggen wel als wiskunde, maar niet als meetkunde volledig gedefinieerd. Anders

---

[1]) Ook als voordracht te Arnhem gehouden, 3 Maart 1937. Bij de bewerking van dit artikel is in het bijzonder gebruik gemaakt van W. Killing en H. Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts I, 1910.

gezegd, zij mist de definieering, die haar een eenduidige realiteit doet zien. Nu denkt men misschien hierbij in de eerste plaats aan het veelal geuite bezwaar, dat een punt, een lijn, een vlak ideëele dingen zijn, die niet te verwezenlijken zijn. Doch zoo staat de zaak niet. Het bezwaar is dit, dat het systeem in mindere of meerdere mate toepasselijk is op *verschillende* realiteiten en dat dus eigenlijk het beoefenen der algemeene meetkunde moet beschouwd worden als het *abstracte* [1]) gedachtenspel, dat noodig is om resulteerende stellingen te verkrijgen. Om misverstand te voorkomen, moet ik meedeelen, dat ik de zooeven genoemde ideëele dingen als realiteiten beschouw. Met die realiteiten nu, houden de bijzondere meetkunden zich bezig. Tot die bijzondere meetkunden rekenen we de natuurlijke, de niet-natuurlijke en de arithmetiseerende en het is eigenlijk over een deel der natuurlijke meetkunde, dat ik het heden zal hebben.

Een enkel woord nog over de pogingen, die zijn aangewend om de realiteit *meetkundig* volkomen vast te leggen. In den loop der tijden — het begint al met Euclides — zijn vele pogingen aangewend, alle met minder of meer succes en het schijnt wel, dat de verzamelingenleer op het meeste succes kan bogen.

De natuurlijke meetkunde. Wij nemen b.v. een plat vlak, voorgesteld door het vlak van het bord (of een blad papier) en teekenen daarop z.g. punten en lijnen. Dit zijn alle physische dingen, waarvan getracht wordt ze zooveel mogelijk een denkbeeld te doen vormen van wat ze niet zijn: de ideëele figuren. Dan komt ter verkrijging van stellingen, berekeningen, bewijzen van constructies, waarbij in geen of mindere of meerdere mate van de genoemde physische dingen op nieuw gebruik gemaakt wordt, het zooeven genoemde gedachtenspel. Zijn nu wel de Hilbertsche axioma's van toepassing? Eigenlijk niet bij wat men reëel *voor zich heeft.* Maar dit deert ons niet, omdat het gedachtenspel de ideëele dingen betreft. Wij hadden ook de genoemde physische dingen door andere kunnen vervangen en dan, in aansluiting daarmede, hetzelfde gedachtenspel kunnen uitvoeren, laat het zijn met heel wat meer moeite, omdat er heel wat meer van ons voorstellingsvermogen zou geeischt worden. Laten we b.v. physische figuren hebben, die de

---

[1]) „Abstract" wordt hier gebruikt in de beteekenis van *„niet"* gebonden aan één *bepaald* beeld". M.i. bestaat „het abstracte" in de beteekenis van *„niet* gebonden aan *eenig* beeld" niet.

inverse van de zooeven bedoelde voorstellen. Ook hiermede zouden we — al is het dan met eenige restrictie — het Hilbertsche systeem (de figuren natuurlijk weer ideëel bedoeld) kunnen toepassen. Maar dan zouden we moeten zeggen, dat we beoefend hebben een niet-natuurlijke meetkunde. Dit laatste doen we bij voorkeur niet! En nog minder voelen we er voor in 't geheel geen physische dingen te gebruiken (of ons voor te stellen), wat ook mogelijk zou zijn, hoewel dàn een eenigszins ver doorgevoerd gedachtenspel de krachten van misschien slechts enkelen op den aardbodem niet zou te boven gaan.

2. Maar ik zou het speciaal over planimetrische constructies hebben. Dan komt het physisch gebeuren wat meer naar voren en wel in verschillende opzichten als het meer of minder overzichtelijke, de meerdere of mindere uitvoerigheid van het bewijs, de meer of minder tijd kostende uitvoering, het meer of minder benaderende van het ideëele (de gewenschte realiteit dus). En dan — ook uit een oogpunt van elegance is dit niet onverschillig — komt ter sprake: van welke hulpmiddelen, physisch dus van welke instrumenten, gebruik gemaakt wordt. Het is juist de laatste vraag, die ik heden onder het oog wenschte te zien. Toch wenschte ik over het tijd-kostende en ook benaderende element, dat er mee samenhangt, nog even iets te zeggen.

Men kan uitgaan van het vrije gebruik van de lineaal, den passer, de tweekantenlineaal en den driehoek (Winkelhaken, équerre). Over het gebruik van Hilbert's „Streckenübertrager", als zijnde een beperkt gebruik van den passer, spreek ik niet. [1]) Beperken we ons tot dat van lineaal en passer, dan komt in aanmerking de geometrografie van Lemoine, uitgedrukt door de formule voor het aantal operaties:

$$\text{Op.} = l_1 \, R_1 + l_2 \, R_2 + m_1 \, C_1 + m_2 \, C_2 + m_3 \, C_3.$$

R_1 = het plaatsen van den kant van de lineaal door eèn voorgeschreven punt.

[1]) Evenmin wil ik spreken over instrumenten, waarmede men bepaalde krommen (b.v. ellips, parabool, hyperbool) kan construeeren of zeer bepaalde constructies kan uitvoeren, al zijn hieronder wel zeer eenvoudige als b.v. de trisectie van een hoek, die met een passer en een lineaal, waarlangs een willekeurig lijnstuk is afgepast, kan worden uitgevoerd. (Zie Euclides 2e jg. no. 1, 't vroegere Bijvoegsel, blz. 16, fig. 5.)

R_2 = het trekken van een rechte lijn langs de lineaal.
C_1 = het plaatsen van een passerpunt in een voorgeschreven punt.
C_2 = het plaatsen van een passerpunt in een willekeurig punt van een rechte lijn.
C_3 = het trekken van een cirkel met den passer.
l_1, l_2, m_1, m_2 en m_3 zijn resp. de aantallen keeren, die deze operaties plaats hebben.

De eenvoudigheids-coëfficient $S = l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$.

De nauwkeurigheids-coëfficient $E = l_1 + m_1 + m_2$.

Ik zal niet uitweiden over de bezwaren, die tegen de formules van Lemoine zijn in te brengen; ik mag er misschien op wijzen, dat feitelijk $C_1 = 2\,C_2$.

Voor het onderwijs zijn de formules zeker te omslachtig in 't gebruik. Ik gebruikte geregeld een vereenvoudiging door te beschouwen

$$\text{Op.} = l_2\,R_2 + m_3\,C_3$$

of eigenlijk alleen

$$S = l_2 + m_3.$$

Onder C_3 rekende ik dan ook het tusschen den passer nemen van een lijnstuk al of niet gepaard gaande met het tegelijk trekken van een cirkel. Van belang is dan b.v. den leerlingen voor te houden de meest wenschelijke constructie, die men geregeld heeft toe te passen bij het oprichten van een loodlijn uit een gegeven punt eener lijn; bij het bepalen van P in AB van $\angle$ BAC als PA = PC moet zijn (vooral als 't trekken van PC zelf niet noodig is). En ook is het niet ondienstig met de leerlingen eens na te gaan, welke van de vijf constructies voor $x = \sqrt{ab}$ de meeste aanbeveling verdient uit: 1e. (zie fig. 1) AB = b, AC = BD = a = DE = CE, dan is AE = x. 2e. $\sqrt{ab} = \sqrt{\{\frac{1}{2}(a+b)\}^2 - \{\frac{1}{2}(a-b)\}^2}$. 3e. en 4e. de twee bekende constructies met een halven cirkel en 5e. de raaklijn uit P op AB aan een cirkel door A en B als PA = a

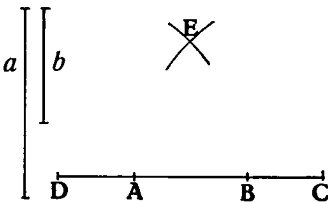


Fig. 1.

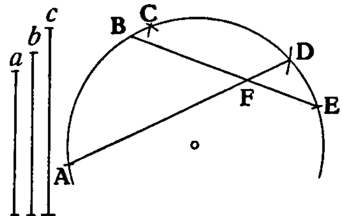


Fig. 2.

en PB $=b$. En ik beveel ook nog onder de aandacht van mijn vroegere collega's aan de volgende constructie (zie fig. 2) van $x = \frac{ab}{c}$ in een cirkel met een voldoende-grooten straal: AB $= a$, AC $= b =$ BD, CE $= c$, dan is BF $= x$. Zie ook nog blz. 267.

De nauwkeurigheid hangt natuurlijk met Op. samen, maar zeker ook nog met andere zaken. Zoo zal men voor het loodrecht middendoor deelen van een lijnstuk cirkels met groote stralen moeten nemen, als het „loodrecht" de hoofdzaak is, met kleine daarentegen, als het „middendoor deelen" dat is. Op die nauwkeurigheid in te gaan, is niet mijn plan. De onderzoekingen, die hierover zijn gepubliceerd, lijken mij niet voldoende beslissend.

3. Laat ik thans in het kort de mogelijkheid bespreken om met behulp van lineaal en passer (ideaal gezegd: om door het trekken van rechte lijnen en cirkels) een zekere constructie uit te voeren. Roepen wij daartoe de analytische meetkunde te hulp, waarbij wij ons rechthoekige coördinaten gebruikt denken. Uitgaande van gegeven lijnstukken, hoeken, (een hoek is gegeven als verhouding van twee lijnstukken) en gegeven punten, zullen de coëfficienten van getrokken rechte lijnen zich rationaal in de gegevens laten uitdrukken. Ook met de coëfficienten in de vergelijkingen van cirkels met bekende middelpunten en bekende stralen is dat het geval. Dan komen verder de coördinaten van de snijpunten van die getrokken rechte lijnen voor den dag, rationaal uitgedrukt in de coëfficienten der lijnen, maar het snijpunt van een rechte en een cirkel en ook de snijpunten van twee cirkels geven in 't algemeen uitdrukkingen van den vorm $A \pm \sqrt{B}$. Gaat men dan weer verder en benut men de verkregen punten weer voor het trekken van rechte lijnen en cirkels, dan zullen misschien eerst uitdrukkingen optreden als $A_0 \pm \sqrt{B_0} \pm \sqrt{C_0} \pm \ldots$, maar dan verder, deze uitdrukkingen door A_1, B_1, $C_1 \ldots$ voorstellende, $A_1 \pm \sqrt{B_1} \pm \sqrt{C_1} \pm \ldots$, enz. Men ziet, waarheen dit proces voert en welke soort van uitdrukkingen men voor de coördinaten x en y van een gevraagd punt verkrijgt. Men zou deze uitdrukkingen, afgezien van het gevolgde proces, als lijnstukken kunnen construeeren. Maar nu gaan we een vergelijking als

$$x = P$$

eens zoo herleiden, dat alle vierkantswortels successievelijk ver-

dwijnen. Herhaalde kwadrateering geeft dan een vergelijking met rationale coëfficienten, die van den graad 2^n (n = positief geheel) is.

Nu keeren we de zaak eens om en vragen: *is* er met behulp van lineaal en passer een constructie mogelijk voor een bepaald vraagstuk, waarin het noodige aantal gegevens aanwezig is? Zoo ja, dan is het duidelijk, dat we voor dit geval te doen krijgen met de vraag, of er nu een aanwijsbare vergelijking met rationale coëfficienten van den graad 2^n (n = positief geheel of nul) is, die we kunnen oplossen. Mocht men dus, ter oplossing van het probleem, een irreducibele vergelijking hebben op te lossen, die niet van den graad 2^n is, dan is de mogelijkheid van de oplossing van het probleem vooreerst al uitgesloten. Maar met een vergelijking met rationale coëfficienten van den graad 2^n is men er natuurlijk toch niet, als deze irreducibel blijkt te zijn. Zoo is b.v. de oplossing van de vergelijking

$$x^{17} = 1 \text{ of } x^{17} - 1 = 0,$$

die optreedt bij de constructie van den regelm. zeventienhoek [zooals dat uit het theorema van de Moivre $\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i \sin\frac{\alpha}{n}\right)^n =$ $= \cos\alpha + i\sin\alpha$ volgt], wèl tot de oplossing van een reducibele vergelijking van den graad 2^n (nl. 2^4) terug te brengen, waarbij het reducibele tot een hier passend einde kan worden voortgezet, terwijl men ditzelfde niet volledig kan zeggen van de oplossing van de vergelijking

$$x^9 - 1 = 0,$$

die optreedt bij de vraag, of een regelm. negenhoek te construeeren is. De regelm. 3-hoek, 5-hoek, 257-hoek, 65537-hoek verkeeren in 't geval van den regelm. 17-hoek. Hierbij is n (volgens Gauss) priem $= 2^{(2^\nu)} + 1$. Doch bij den regelm. 7-hoek, 9-hoek, 13-hoek stuit men ten slotte op irreducibele derdemachtsvergelijkingen; bij den regelmatigen 11-hoek is het nog erger, daar men hier op een irr. vijfdemachtsvergelijking stuit. Ik zal op de interessante oplossing van de verg. $x^{17} - 1 = 0$ met haar verdere consequenties, die wij aan Gauss te danken hebben, niet nader ingaan.

Zo juist verschenen:

De Elementaire Meetkunde van het Platte Vlak

door Dr O. BOTTEMA. Prijs *f* 6.50, geb. *f* 7.50.

Voor abonné's op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften tot 1 Aug. 1938 *f* 5.50, geb. *f* 6.50.

Verschenen:

Dr E. J. DIJKSTERHUIS

Archimedes 1e deel

(deel VI van de Historische bibliotheek voor de exacte vakken). Prijs geb. *f* 4.50; voor abonné's op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften tot 1 Aug. 1938 *f* 3.90.

Ter perse:

Leerboek der Nieuwere Meetkunde van het Platte Vlak en de Ruimte

door Prof. Dr F. SCHUH.

P. WIJDENES

Beknopte driehoeksmeting A,

8ste druk met de leerstof voor de 3de klasse — 50 bladzijden, met 25 figuren *f* 0.75.
Present-exemplaren zijn verzonden.

Beknopte driehoeksmeting B, ter perse.

Zo juist verschenen:

Tafels in vier decimalen,

benevens gegevens op verschillend gebied voor schoolgebruik door Dr H. J. E. BETH *f* 0.45.

Verschenen:

Trigonometrische Vraagstukken

met beknopte theorie
door J. VAN DER GRIEND Jr. 4e druk *f* 1.90.

Uitgaven P. Noordhoff N.V. Groningen, Batavia.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.